ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. П. Аксенов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 3

УЧЕБНИК и ПРАКТИКУМ

СООТВЕТСТВУЕТ ПРОГРАММАМ ВЕДУЩИХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

УМО ВО рекомендует
МО рекомендует

ЮРАЙТ
издательство

А. П. Аксенов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 3

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ ВУЗОВ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

Курс с практическими заданиями и дополнительными материалами доступен на образовательной платформе «Юрайт», а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва • Юрайт • 2024

УДК 517.1-3(075.8)
ББК 22.161я73
А42

Автор:

Аксенов Анатолий Петрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Рецензенты:

Кудрявцев Л. Д., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского физико-технического института, старший научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова;

Розанова С. А., доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики;

Карасев В. А., кандидат технических наук, доцент Московского государственного института стали и сплавов.

Аксенов, А. П.

А42 Математический анализ. В 4 частях. Ч. 3 : учебник и практикум для вузов / А. П. Аксенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 361 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-04024-1 (ч. 3)
ISBN 978-5-534-04025-8

Данная книга представляет собой третью часть учебника «Математический анализ» (учебник разделен на четыре части), который издается в рамках авторского цикла учебников по разделам высшей математики.

Содержание учебника полностью охватывает программу по курсу математического анализа для технических вузов.

В третьей части учебника изложен теоретический материал по теории функций нескольких переменных, дифференциальному исчислению функций нескольких переменных, теории рядов.

Разобрано большое количество примеров и задач, разъясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение. Все сформулированные теоремы (трудные и простые), как правило, доказываются.

Соответствует актуальным требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов первых курсов высших технических учебных заведений. Может быть использован для самостоятельной подготовки и повышения квалификации.

УДК 517.1-3(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-534-04024-1 (ч. 3)
ISBN 978-5-534-04025-8

Оглавление

ТЕОРИЯ РЯДОВ

Предисловие

Данное пособие представляет собой третий том четырехтомника “Математический анализ” (первый том второй части).

Учебник написан в рамках цикла книг по разделам высшей математики, составленных на основе курсов лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете, основанием для написания которого послужило желание дать достаточное по строгости, глубине и доходчивости изложение основ высшей математики.

Учебник адресован студентам первых курсов высших технических учебных заведений, обучающимся по направлениям и профилям технических специальностей высшего образования (ВО), раздел “Математический и естественнонаучный цикл” для которых содержит согласно ФГОС ВО курс “Математический анализ” или “Высшая математика”. Учебник может быть использован и для самостоятельной подготовки и повышения квалификации по базовой части этих дисциплин.

Для успешного овладения материалом обучающиеся должны хорошо знать базовый курс математического анализа (в объеме первых двух томов учебника “Математический анализ”) и владеть навыками логического и алгоритмического мышления, а также математическими методами решения задач согласно требованиям стандартов среднего образования.

В третьем томе учебника изложен теоретический материал по темам “Предел и непрерывность функции нескольких переменных”, “Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных”, “Теория неявных функций”, “Обычные и условные экстремумы для функций нескольких переменных”, “Числовые и функциональные ряды”. Эти темы представляют собой продолжение материала по дифференциальному и интегральному исчислению, рассмотренному в первых двух томах.

Разобрано большое количество примеров и задач, разъясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение.

Перечисленные выше темы определяют содержание компетенций, знаний и умений, формируемых при изучении материала.

В результате изучения третьего тома учебника “Математический анализ” обучающиеся должны:

знать

- понятия частных производных, обычных и условных экстремумов, числовых и функциональных рядов и связанные с ними методы математического анализа;
- положения и теоретические основы дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных;
- методы решения прикладных задач, базирующиеся на отыскании экстремумов функций нескольких переменных, исследовании сходимости рядов и т.п.;

уметь

- использовать полученные знания о математических понятиях, методах и моделях в практической деятельности при вычислении частных производных и дифференциалов и иных характеристик, встречающихся в курсах естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;
- применять теоретические знания для математического исследования свойств функций нескольких переменных, сходимости числовых и степенных рядов, рядов Фурье, а также анализа и интерпретации полученных результатов в прикладных задачах;
- самостоятельно формулировать, обосновывать и строго логически и математически доказывать утверждения из области теории пределов и непрерывности функций нескольких переменных, дифференциального и интегрального исчисления этих функций;
- выбирать необходимые математические методы для практического решения задач оптимизации и оценки погрешности по формуле Тейлора и с помощью рядов и др.;

владеть

- навыками разрешения проблем, возникающих в ходе математического моделирования реальных процессов и явлений методами дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных;
- навыками работы с учебной и научной математической литературой для поиска необходимой информации по вопросам вычисления частных производных и дифференциалов, исследованию сходимости рядов;
- современными технологиями математического анализа и информационной поддержки решения задач теории функций нескольких переменных.

На основе полученных знаний у обучающихся формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

- способность использовать основные законы и методы дифференциального и интегрального исчисления в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования функций нескольких переменных в теоретических и экспериментальных исследованиях;
- умение выявить математическую сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения физико-математический аппарат исчисления бесконечно малых и бесконечно больших функций нескольких переменных, приближенные алгоритмы на базе исследования сходимости рядов, отыскания экстремумов в многомерных пространствах;
- способность разрабатывать математические модели объектов профессиональной деятельности с привлечением дифференцирования и интегрирования функций многих переменных, а также определять характеристики реальных объектов по разработанным моделям.

Глава 1

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§1. Геометрическое введение

1. Совокупность n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, взятых в определенном порядке, называется *точкой n-мерного пространства.*

Множество всех таких точек называют n-мерным пространством и обозначают через $\mathbf{R}^n$.

Числа x_1, x_2, ..., x_n называют *координатами точки.*

2. Пусть $A(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ и $B(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \dots, \tilde{\tilde{x}}_n)$ — любые две точки из $\mathbf{R}^n$. *Расстоянием* между точками A и B называется число

$$\rho(A,B) = \sqrt{(\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{\tilde{x}}_2 - \tilde{x}_2)^2 + \dots + (\tilde{\tilde{x}}_n - \tilde{x}_n)^2}\,.$$

Это число удовлетворяет следующим трем условиям:

а) $\rho(A,B) \ge 0$, причем $\rho(A,B) = 0$ лишь тогда, когда точки A и B совпадают, т. е. когда $\tilde{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1$, $\tilde{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2$, , $\tilde{\tilde{x}}_n = \tilde{x}_n$.

б) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$ (свойство симметрии).

в) Если A, B и C — любые три точки из $\mathbf{R}^n$, то $\rho(A,C) \le \rho(A,B) + \rho(B,C)$ (неравенство треугольника).

3. Пусть $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^n$ и пусть $R > 0$ — некоторое число. Множество всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$, для которых $\rho(M,A) = R$, называется *сферой* радиуса R с центром в точке A.

$$\rho(M,A) = R \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} = R \qquad (1)$$

— уравнение сферы.

Множество всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$, для которых $\rho(M, A) < R$, называется *открытой сферой* радиуса R с центром в точке A.

Множество всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$, для которых $\rho(M, A) \le R$, называется *замкнутой сферой* радиуса R с центром в точке A.

4. Пусть имеются числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ такие, что $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, , $a_n < b_n$. Множество всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$, для которых

$$\begin{cases} a_1 < x_1 < b_1, \\ a_2 < x_2 < b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_n < x_n < b_n, \end{cases}$$

называют *открытым параллелепипедом* и обозначают через (P).

Множество всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$, для которых

$$\begin{cases} a_1 \le x_1 \le b_1, \\ a_2 \le x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_n \le x_n \le b_n, \end{cases}$$

называют *замкнутым параллелепипедом* и обозначают через $(\overline{P})$.

Точку $C\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$ называют *центром* параллелепипеда.

5. Пусть E — некоторое множество точек из $\mathbf{R}^n$. Множество E называется *ограниченным*, если существует число $R > 0$ такое, что все точки множества E оказываются лежащими внутри сферы радиуса R с центром в точке $O(0, 0, \dots, 0)$.

Теорема. Пусть множество $E(M) \subset \mathbf{R}^n$. Пусть:

$\{x_1\}$, $M \in E$, — множество, которое образуют первые координаты точек M из E;

$\{x_2\}$, $M \in E$, — множество, которое образуют вторые координаты точек M из E;

....

$\{x_n\}$, $M \in E$, — множество, которое образуют n-е координаты точек M из E.

Для того чтобы множество $E(M)$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы были ограниченными одновременно множества: $\{x_1\}$, $M \in E$; $\{x_2\}$, $M \in E$; ; $\{x_n\}$, $M \in E$.

Необходимость.

▶ Дано: $E(M(x_1, x_2, \dots, x_n))$ — ограниченное. Следовательно, существует число $R > 0$ такое, что $\rho(M, O) < R$ для любой точки M из E, т. е. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} < R$ для любой точки M из E. Имеем тогда:

$$0 \le |x_1| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} < R,$$
$$0 \le |x_2| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} < R,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \le |x_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} < R,$$

для любой точки M из E. А это означает, что множества $\{x_1\}$, $M \in E$; $\{x_2\}$, $M \in E$; ; $\{x_n\}$, $M \in E$ — ограниченные. ◀

Достаточность.

▶ Дано: Множества $\{x_1\}$, $M \in E$; $\{x_2\}$, $M \in E$; ; $\{x_n\}$, $M \in E$, — ограниченные. Следовательно, существует число $L > 0$ такое, что $|x_1| < L$, $|x_2| < L$, , $|x_n| < L$, для любой точки M из E. А тогда

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} < \underbrace{L \cdot \sqrt{n}}_{\text{определенное число}} \ (= R),$$

т. е. $\rho(M, O) < R$ для любой точки M из множества E. А это означает, что множество $E(M)$ — ограниченное. ◀

6. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ определены и непрерывны на промежутке $[a, b]$. Множество всех точек $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbf{R}^n$, для которых

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b], \tag{2}$$

называют *непрерывной кривой* и обозначают через (K). Уравнения (2) называются *параметрическими уравнениями* кривой (K).

7. Пусть E — некоторое множество точек из $\mathbf{R}^n$. Множество E называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой (K), все точки которой принадлежат E.

8. Пусть

$$\left\{M_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})\right\}_{k\in\mathbf{N}} \tag{3}$$

есть некоторая последовательность точек из $\mathbf{R}^n$. Пусть $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — некоторая фиксированная точка из $\mathbf{R}^n$. Говорят, что последовательность точек (3) *сходится к точке* A, и пишут:

$$M_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A, \quad \text{если} \quad \rho(M_k, A) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{4}$$

Теорема. Для того чтобы последовательность точек (3) сходилась к точке A, необходимо и достаточно, чтобы одновременно было:

$$x_1^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_1, \quad x_2^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_2, \quad \dots, \quad x_n^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_n. \tag{5}$$

Необходимость.

▶ Дано: $M_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A \quad \Leftrightarrow \quad \rho(M_k, A) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - a_n)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{6}$$

Имеем:

$$0 \le \left|x_1^{(k)} - a_1\right| \le \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - a_n)^2},$$
$$0 \le \left|x_2^{(k)} - a_2\right| \le \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - a_n)^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 \le \left|x_n^{(k)} - a_n\right| \le \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - a_n)^2}.$$

Принимая во внимание (6), заключаем, что

$$x_1^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_1, \quad x_2^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_2, \quad \dots, \quad x_n^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_n . \blacktriangleleft$$

Достаточность.

$\blacktriangleright$ Дано: $x_1^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_1,\ x_2^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_2,\ ,\ x_n^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_n \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (x_1^{(k)} - a_1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

$$(x_2^{(k)} - a_2) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \dots, \quad (x_n^{(k)} - a_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x_1^{(k)} - a_1)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

$$(x_2^{(k)} - a_2)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \dots, \quad (x_n^{(k)} - a_n)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left[(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \dots + (x_n^{(k)} - a_n)^2\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \rho(M_k, A) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 .$$

А это означает, что $M_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$. $\blacktriangleleft$

9. Пусть $E\{M\}$ — некоторое множество точек из $\mathbf{R}^n$. Пусть A — некоторая фиксированная точка в $\mathbf{R}^n$. Точка A может принадлежать, а может и не принадлежать множеству $E\{M\}$.

Точку A называют *предельной точкой* множества $E\{M\}$, если можно построить последовательность точек $\{M_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ такую, что $M_k \in E$, $M_k \neq A$ для любого $k \in \mathbf{N}$ и $M_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$.

10. Множество $E\{M\}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. (Примерами замкнутых множеств являются замкнутая сфера, замкнутый параллелепипед.)

§2. Принцип выбора

Пусть

$$\left\{M_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})\right\}_{k\in\mathbf{N}} \tag{1}$$

есть некоторая последовательность точек из $\mathbf{R}^n$.

Если последовательность (1) ограниченная, то из нее можно выделить подпоследовательность, имеющую предел.

▶ Доказательство проведем для случая, когда $n = 2$. В этом случае последовательность (1) имеет вид:

$$\{M_k(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbf{N}}. \tag{1'}$$

По условию последовательность точек (1′) ограниченная. Следовательно, ограниченными будут последовательности

$$\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}} \tag{2}$$

и

$$\{y_k\}_{k\in\mathbf{N}}. \tag{3}$$

Рассмотрим, например, последовательность (2). Она — числовая, ограниченная. Но тогда, по принципу выбора Больцано — Вейерштрасса для числовых последовательностей, из нее можно выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел. Пусть это будет подпоследовательность

$$\{x_{k_m}\}_{m\in\mathbf{N}} \tag{$\tilde{2}$}$$

и пусть $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} a$ (a — конечное число). Из последовательности (3) выделим подпоследовательность

$$\{y_{k_m}\}_{m\in\mathbf{N}} \tag{$\tilde{3}$}$$

но не по принципу выбора Больцано — Вейерштрасса, а так, чтобы индексы ($\tilde{3}$) совпадали с индексами подпоследовательности ($\tilde{2}$).

Ясно, что ($\tilde{3}$) — числовая, ограниченная (ибо таковой является последовательность (3)). Поэтому из ($\tilde{3}$), по принципу выбора Больцано — Вейерштрасса, можно выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел. Пусть это будет подпоследовательность

$$\{y_{k_{m_i}}\}_{i\in\mathbf{N}} \tag{$\tilde{\tilde{3}}$}$$

и пусть $y_{k_{m_i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} b$ (b — конечное число).

Теперь из ($\tilde{2}$) выделим подпоследовательность

$$\{x_{k_{m_i}}\}_{i\in\mathbf{N}} \tag{$\tilde{\tilde{2}}$}$$

так, чтобы индексы $(\tilde{\tilde{2}})$ совпадали с индексами $(\tilde{\tilde{3}})$. Ясно, что $x_{k_{m_i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} a$ (так как любая подпоследовательность, выделенная из сходящейся последовательности, сходится к тому же самому пределу).

Нетрудно понять, что $\left\{M_{k_{m_i}}\right\}_{i\in\mathbb{N}} = \left\{(x_{k_{m_i}}, y_{k_{m_i}})\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ есть искомая последовательность. Она сходится к точке $A(a,b)$. ◀

§3. Понятие функции нескольких переменных

Пусть имеется некоторое множество E пар чисел (x,y). Геометрически E представляет собой некоторое множество точек плоскости Oxy.

Если каждой точке $(x,y)\in E$ по какому-нибудь правилу сопоставляется определенное значение переменной z, то говорят, что на множестве E задана *функция* $z = f(x,y)$.

Переменные x и y называют *независимыми переменными* или *аргументами* функции, а множество E — *областью задания* функции.

Придавая x и y конкретные значения (любые, но такие, что $(x,y)\in E$), мы всякий раз будем получать конкретное числовое значение переменной z. Таким образом, значениями z "управляют" пары чисел (x,y).

Для обозначения частного значения функции $z = f(x,y)$, отвечающего частным значениям x_0 и y_0 независимых переменных, употребляются символы $f(x_0,y_0)$ или $z\big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.

Функция $z = f(x,y)$ геометрически иллюстрируется так. Рассмотрим прямоугольную пространственную систему координат $Oxyz$ и предположим для простоты, что область задания E функции представляет собой часть плоскости Oxy. Возьмем на E какую-нибудь точку $M(x,y)$ и вычислим соответствующее значение z. Это z отложим на перпендикуляре к плоскости Oxy, проходящем через точку $M(x,y)$. В результате в пространстве получим точку $P(x,y,z)$ (см. рис. 1.1).

Когда точка $M(x,y)$ будет перемещаться в области задания E, соответствующая точка $P(x,y,z)$ опишет, как правило, некоторую поверхность. Эта поверхность служит геометрическим изображение данной функции $z = f(x,y)$.

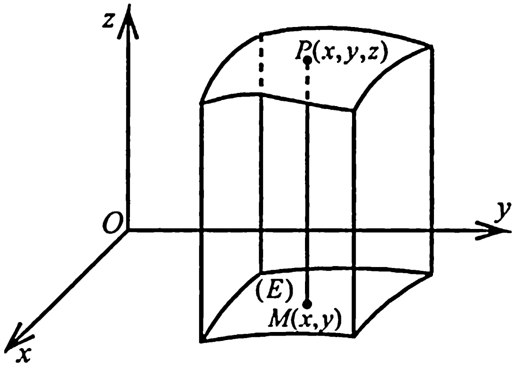


Рис. 1.1

Когда мы рассматриваем функцию $z = f(x,y)$, заданную формулой (без всяких оговорок, связанных со специфическими условиями задачи), то за область задания этой функции мы принимаем множество всех тех пар (x,y), для которых формула имеет смысл (если оставаться в области действительных чисел). Такую естественную область задания часто называют *областью существования* функции.

Так, например, если функция $z = f(x,y)$ задана формулой

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

то область существования этой функции характеризуется условием

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Видим, что это есть замкнутый круг единичного радиуса с центром в точке $O(0,0)$.

Понятие функции от трех и большего числа переменных вводится аналогично случаю функции от двух переменных. Именно: пусть имеется некоторое множество E троек чисел вида (x,y,z). Геометрически E представляет собой некоторое множество точек пространства $Oxyz$. Если каждой точке $(x,y,z) \in E$ по какому-то правилу сопоставляется определенное значение переменной u, то говорят, что на множестве E задана функция $u = f(x,y,z)$. И здесь, когда рассматривается функция $u = f(x,y,z)$, заданная формулой (без всяких оговорок, связанных с условиями задачи), то за область задания этой функции принимается множество всех троек чисел (x,y,z), для которых формула имеет смысл (если оставаться в области действительных чисел). В этом случае область задания называют также *областью существования* функции. Например, пусть функция $u = f(x,y,z)$ задана формулой:

$$u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 3).$$

Область существования этой функции определяется неравенством $-1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 3 \leq 1$, т. е. неравенством $2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Видим, что это есть множество точек, заключенных между сферами радиусов $\sqrt{2}$ и 2 с центром в точке $O(0, 0, 0)$. (Точки обеих сфер также входят в область существования функции.)

Аналогично: пусть имеется некоторое множество E из точек вида $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(n > 3)$. Если каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ по какому-нибудь правилу сопоставляется определенное значение переменной u, то говорят, что на множестве E задана функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ по-прежнему называются *независимыми переменными* или *аргументами* функции, а множество E — *областью задания* функции.

Заметим, что наглядно-геометрически истолковать область задания функций от более чем трех независимых переменных не удается (нашего обычного трехмерного пространства не хватает).

§4. Предел функции нескольких переменных. Повторные пределы

Понятие предела функции от нескольких переменных вводится совершенно аналогично случаю предела функции одной переменной.

Определение. Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве E ($E \subset \mathbf{R}^n$). Пусть точка A — предельная для множества E. Число l называют *пределом* функции $f(M)$ при $M \to A$ и пишут

$$l = \lim_{M \to A} f(M), \tag{1}$$

если для любой последовательности точек $\{M_k\}_{k \in \mathbf{N}}$, такой, что для любого $k \in \mathbf{N}$, $M_k \in E$, $M_k \neq A$ и $M_k \xrightarrow[k \to \infty]{} A$ оказывается, что соответствующая последовательность значений функции: $f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k), \dots$ всегда имеет своим пределом одно и то же число l.

Соотношение (1) записывают также в виде

$$l = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{2}$$

Здесь x_1, x_2, ..., x_n — координаты точки M из E, a_1, a_2, ..., a_n — координаты точки A, предельной для E.

Замечание 1. Для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нескольких переменных, как и для функции одной переменной, можно ввести понятие бесконечного предела, а также понятие предела $\lim\limits_{M \to \infty} f(M)$, когда точка неограниченно удаляется от начала координат, т. е. когда $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \to +\infty$.

Замечание 2. В случае, когда l, a_1, a_2, ..., a_n — конечные числа, определение предела функции от нескольких переменных может быть дано в следующих равносильных формах.

I. Число l называют *пределом* функции $f(M)$ при $M \to A$, если любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $M \in E$, $M \neq A$ и $\rho(M, A) < \delta$, так сейчас же оказывается $|f(M) - l| < \varepsilon$.

II. Число l называют пределом функции $f(M)$ при $M \to A$, если любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и

$$\begin{cases} |x_1 - a_1| < \delta, \\ |x_2 - a_2| < \delta, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ |x_n - a_n| < \delta, \end{cases}$$ так сейчас же $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - l| < \varepsilon$.

Бесконечно малые и бесконечно большие в случае функций нескольких переменных вводятся совершенно так же, как и в случае функций одной переменной. Именно: функция $f(M)$ называется бесконечно малой при $M \to A$, если

$$\lim_{M \to A} f(M) = 0.$$

Функция $f(M)$ называется бесконечно большой при $M \to A$, если

$$\lim_{M \to A} f(M) = \infty, \ +\infty, \ -\infty.$$

Отметим, что свойства бесконечно малых и бесконечно больших, установленные для случая функций одной переменной, распространяются на случай функции нескольких переменных. Сохраняются также понятия порядка, эквивалентности бесконечно малых и бесконечно больших и свойства, связанные с этими понятиями.

Сохраняются и свойства конечных пределов.

1. Число l есть предел функции $f(M)$ при $M \to A$ тогда и только тогда, когда разность $f(M)-l$ есть бесконечно малая при $M \to A$.

Это можно перефразировать и так:

Число l есть предел функции $f(M)$ при $M \to A$ тогда и только тогда, когда $f(M)$ может быть представлена в виде суммы числа l и бесконечно малой при $M \to A$.

2. Если существует конечный предел $\lim\limits_{M\to A} f(M)$, то при любом постоянном C существует конечный предел $\lim\limits_{M\to A} C\cdot f(M)$, причем

$$\lim_{M\to A} C\cdot f(M) = C\cdot \lim_{M\to A} f(M).$$

3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{M\to A} f(M)$ и $\lim\limits_{M\to A} g(M)$, то существует конечный предел $\lim\limits_{M\to A}\left[f(M)\pm g(M)\right]$, причем

$$\lim_{M\to A}\left[f(M)\pm g(M)\right] = \lim_{M\to A} f(M) \pm \lim_{M\to A} g(M).$$

Заметим, что это свойство распространяется на любое фиксированное число слагаемых.

4. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{M\to A} f(M)$ и $\lim\limits_{M\to A} g(M)$, то существует конечный предел $\lim\limits_{M\to A} f(M)\cdot g(M)$, причем

$$\lim_{M\to A} f(M)\cdot g(M) = \lim_{M\to A} f(M)\cdot \lim_{M\to A} g(M).$$

Заметим, что и это свойство распространяется на любое фиксированное число сомножителей.

5. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{M\to A} f(M)$ и $\lim\limits_{M\to A} g(M)$, причем $\lim\limits_{M\to A} g(M)\neq 0$, то существует конечный предел $\lim\limits_{M\to A} \dfrac{f(M)}{g(M)}$, причем

$$\lim_{M\to A} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M\to A} f(M)}{\lim\limits_{M\to A} g(M)}.$$

6. Если в некоторой окрестности точки A

$$p(M) \le f(M) \le g(M)$$

и если $\lim\limits_{M \to A} p(M) = \lim\limits_{M \to A} g(M) = l$, то и $\lim\limits_{M \to A} f(M) = l$;

и т. д.

Введенное выше понятие предела функции нескольких переменных в точке A следует отличать от так называемых повторных пределов этой функции в точке A.

Разъясним понятие повторного предела в точке A на примере функции двух переменных.

Пусть функция $u = f(x,y)$ задана в прямоугольнике $(P) = \begin{cases} a < x \le c, \\ b < y \le d. \end{cases}$ Пусть при каждом закрепленном x из $(a, c]$ существует конечный предел $\lim\limits_{y \to b} f(x,y)$. Ясно, что этот предел будет представлять собой функцию от x, определенную в промежутке $(a,c]$, т. е.

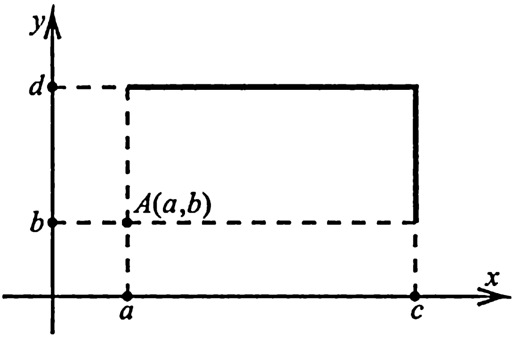


Рис. 1.2

$$\lim_{y \to b} f(x,y) \underset{\uparrow}{=} \varphi(x), \quad x \in (a,c].$$

обозначение

Пусть далее существует конечный предел $m = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$. Число m называют ***повторным пределом*** функции $f(x,y)$ в точке $A(a,b)$ и пишут

$$m = \lim_{x \to a}\left(\lim_{y \to b} f(x,y)\right).$$

Пусть теперь при каждом закрепленном y из $(b,d]$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x,y)$. Ясно, что этот предел будет представлять собой функцию от y, определенную в промежутке $(b,d]$, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x,y) \underset{\uparrow}{=} \psi(y), \quad y \in (b,d].$$

обозначение

Пусть далее существует конечный предел $n = \lim_{y \to b} \psi(y)$. Число n будет другим повторным пределом функции $f(x,y)$ в точке $A(a,b)$. Пишут

$$n = \lim_{y \to b}\left(\lim_{x \to a} f(x,y)\right).$$

Пример 1. Для функции $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точке $O(0,0)$ найти повторные пределы и доказать, что у этой функции в точке $O(0,0)$ предела в обычном смысле нет.

Решение. 1) При любом закрепленном x, отличном от нуля, имеем

$$\lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

т. е. $\varphi(x) \equiv 1$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ясно, что

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = 1,$$

т. е. $m = 1$.

2) При любом закрепленном y, отличном от нуля, имеем

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1,$$

т. е. $\psi(y) \equiv -1$, $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ясно, что

$$\lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = -1,$$

т. е. $n = -1$.

Видим, что у нашей функции в точке $(0,0)$ существуют оба повторных предела и что они различные.

3) Покажем, что у заданной функции в точке $(0,0)$ предела в обычном смысле нет.

В самом деле, возьмем последовательность точек $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$. Имеем для любого $k \in \mathbb{N}$: точки $M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$

принадлежат области существования функции; $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\neq(0,0)$, и $M_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}O(0,0)$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой: $f(M_1)=0$; $f(M_2)=0$; ; $f(M_k)=0$; . Следовательно, $f(M_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$.

Возьмем теперь последовательность точек $\left\{\widetilde{M}_k\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbf{N}}$. Имеем для любого $k\in\mathbf{N}$: точки $\widetilde{M}_k\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)$ принадлежат области существования функции; $\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)\neq(0,0)$ и $\widetilde{M}_k\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой: $f(\widetilde{M}_1)=\frac{3}{5}$; $f(\widetilde{M}_2)=\frac{3}{5}$, , $f(\widetilde{M}_k)=\frac{3}{5}$, . Следовательно, $f(\widetilde{M}_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{3}{5}$.

Вывод. У заданной функции в точке $O(0,0)$ предела в обычном смысле нет.

Пример 2. Для функции $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ в точке $O(0,0)$ найти повторные пределы и доказать, что у этой функции в точке $O(0,0)$ предела в обычном смысле нет.

Решение. 1) При любом закрепленном x ($x\neq0$) имеем

$$\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0,$$

т. е. $\varphi(x)\equiv0$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. А тогда

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=0,$$

т. е. $m=0$.

2) При любом закрепленном y ($y \neq 0$) имеем

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0,$$

т. е. $\psi(y) \equiv 0$, $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. А тогда

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = 0,$$

т. е. $n = 0$.

3) Покажем, что у заданной функции $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ предела в обычном смысле нет.

Для этого возьмем последовательность точек $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathrm{N}}$.

Имеем для любого $k \in \mathrm{N}$: точки $M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ принадлежат области существования функции; $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \neq (0,0)$ и $M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} O(0,0)$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой: $f(M_1) = 1$, $f(M_2) = 1$, , $f(M_k) = 1$, . Следовательно, $f(M_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$.

Возьмем теперь последовательность точек $\left\{\tilde{M}_k\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)\right\}$. Имеем для любого $k \in \mathrm{N}$: точки $\tilde{M}_k\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)$ принадлежат области существования функции; $\tilde{M}_k\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) \neq O(0,0)$ и $\tilde{M}_k\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} O(0,0)$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой:

$$\left\{f(\tilde{M}_k)\right\}_{k\in\mathrm{N}} = \left\{\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}+\frac{4}{k^2}}\right\}_{k\in\mathrm{N}} = \left\{\frac{1}{1+4k^2}\right\}_{k\in\mathrm{N}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Вывод. У заданной функции в точке $O(0, 0)$ предела в обычном смысле нет.

Из приведенного примера видим, что из существования и равенства повторных пределов функции в точке не следует существование в этой точке предела в обычном смысле.

Пример 3. Показать, что у функции $f(x,y)=(x+y)\cdot$ $\cdot\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}$ в точке $O(0, 0)$ существует предел в обычном смысле, но не существуют оба повторных предела.

Решение. Отметим, что областью существования заданной функции является вся плоскость Oxy с исключенной точкой $O(0, 0)$.

1) Имеем для любых $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$0 \le \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\right| \le |x+y| \le |x|+|y|.$$

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|)=0$, то заключаем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left((x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}\right)=0$. Следовательно, у заданной функции в точке $O(0, 0)$ существует и равен 0 предел в обычном смысле.

2) Заметим, что при любом закрепленном x ($x \neq 0$) заданная функция будет представлять собой функцию только от y. Покажем, что у этой функции не при любом закрепленном x ($x \neq 0$) существует предел при $y \to 0$. В самом деле,

а) Если $x=\dfrac{1}{k\pi}$, $k\in\mathrm{N}$, то $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{1}{k\pi}+y\right)\cdot\sin k\pi\cdot$ $\cdot\sin\dfrac{1}{y}=0$.

б) Пусть теперь $x\neq\dfrac{1}{k\pi}$, $k\in\mathrm{N}$. Заметим, что тогда $x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\neq 0$. Возьмем две последовательности: $\{y_k\}_{k\in\mathrm{N}}=\left\{\dfrac{1}{k\pi}\right\}_{k\in\mathrm{N}}$ и $\{\tilde{y}_k\}_{k\in\mathrm{N}}=\left\{\dfrac{1}{(4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}}\right\}_{k\in\mathrm{N}}$. Ясно, что $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и $\tilde{y}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Соответствующие последовательности значений функции будут такими:

$$\{f(x,y_k)\}_{k\in\mathrm{N}}=\{0\} \quad \text{и}$$

$$\{f(x,\tilde{y}_k)\}_{k\in\mathrm{N}}=\left\{\left(x+\frac{1}{(4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}}\right)\sin\frac{1}{x}\right\}_{k\in\mathrm{N}}.$$

Имеем $\{f(x,y_k)\}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, $\{f(x,\tilde{y}_k)\}\xrightarrow[k\to\infty]{}x\sin\frac{1}{x}\neq 0$. Следовательно, при $x\neq\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathrm{N}$, $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ не существует, а значит, не существует и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\right)$.

3) Совершенно аналогично устанавливается, что не существует $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\right)$.

Из приведенного примера следует, что из существования у функции $f(x,y)$ обычного предела в точке не следует существование у нее в этой точке повторных пределов.

Пример 4. Вычислить предел функции $f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$ вдоль любого луча $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ $t\in[0,+\infty)$, при $t\to+\infty$. Можно ли функцию $f(x,y)$ назвать бесконечно малой при $x\to\infty$, $y\to\infty$?

Решение. Имеем $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=t^2\cos^2\alpha\cdot e^{-(t^2\cos^2\alpha-t\sin\alpha)}$.

1) Если $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$, то $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\big|_{\alpha=\pm\frac{\pi}{2}}=0$, $t\in[0,+\infty)$. Следовательно, вдоль лучей $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$: $\lim\limits_{t\to+\infty}f(x,y)=0$.

2) Пусть $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$. Тогда $\cos^2\alpha>0$ и $(t^2\cos^2\alpha-t\sin\alpha)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$.

Имеем в этом случае: $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\dfrac{t^2\cos^2\alpha}{e^{t^2\cos^2\alpha-t\sin\alpha}}$ — неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $t \to +\infty$. Раскрываем эту неопределенность по правилу Лопиталя:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{(2t\cos^2\alpha - \sin\alpha)\cdot e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} =$$

$$= \cos^2\alpha \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\left(\cos^2\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{2t}\right)\cdot e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} = 0.$$

Вывод: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x,y) = 0$ вдоль любого луча $\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \end{cases}$ $t \in [0, +\infty)$. Заданная функция не является бесконечно малой при $x \to \infty$ и $y \to \infty$. В самом деле, возьмем, например, $x_k = k$, $y_k = k^2$. Ясно, что $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$, $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$. При таком выборе x_k и y_k будем иметь:

$$f(x_k, y_k) = k^2 e^{-(k^2-k^2)} = k^2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} k^2 = +\infty.$$

§5. Непрерывность функции нескольких переменных

Определение. Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве E ($E \subset \mathbb{R}^n$). Пусть точка A — предельная для множества E и точка $A \in E$. Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной* в точке A, если

$$\lim_{M\to A} f(M) = f(A). \qquad (1)$$

На “языке последовательностей” определение непрерывности функции $u = f(M)$ в точке A формулируется следующим образом:

Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной* в точке A, если для любой последовательности точек $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, такой, что $M_k \in E$ и $M_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$ оказывается, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ имеет своим пределом $f(A)$.

На “языке ε-δ” определение непрерывности функции $u = f(M)$ в точке A формулируется так:

Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной* в точке A, если любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, такое, что как только $M \in E$ и $\rho(M, A) < \delta$, так сейчас же $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Условию (1) непрерывности функции $u = f(M)$ в точке A можно придать и иную равносильную и часто употребительную форму. Прежде всего, следует заметить, что соотношение (1) равносильно такому:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_{10} \\ x_2 \to x_{20} \\ \dots \\ x_n \to x_{n0}}} \left[f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \right] = 0. \qquad (\tilde{1})$$

Здесь x_1, x_2, ..., x_n — координаты точки $M \in E$, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0} — координаты точки A ($A \in E$ и A — предельная для E). Если ввести обозначения

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{10}, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_{20}, \quad \dots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n0},$$

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

то равенство $(\tilde{1})$ можно переписать так:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0. \qquad (2)$$

Величины Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n называются приращениями независимых переменных; Δu — приращением функции.

Итак, функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна в точке $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2), т. е. когда приращение функции Δu стремится к нулю, как только стремятся к нулю приращения независимых переменных.

Равенство (2) иногда записывают и так:

$$\lim_{\rho\to 0} \Delta u = 0,$$

где положено $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$. Величина ρ представляет собой расстояние между "исходной" точкой $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ и "сдвинутой" точкой $(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \ldots, x_{n0} + \Delta x_n)$.

Если функция $u = f(M)$ непрерывна в каждой точке множества E, то её называют непрерывной на множестве E.

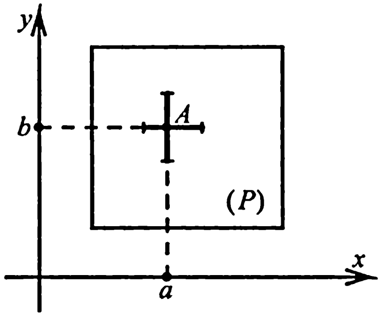


Рис. 1.3

Замечание. Введенное выше понятие непрерывности функции $u = f(M)$ в точке A называют также непрерывностью этой функции в точке A *по совокупности переменных.*

Вводится также понятие непрерывности функции $u = f(M)$ в точке A по каждой переменной в отдельности. Разъясним это понятие на примере функции двух переменных.

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в некотором прямоугольнике (P), содержащем точку $A(a, b)$. Рассмотрим отрезок прямой $x = a$, содержащий точку $A(a, b)$ и содержащийся в (P). Станем рассматривать функцию $u = f(x, y)$ в точках этого отрезка. Получим $u = f(a, y)$. Это уже функция одной переменной y. Если функция $f(a, y)$ непрерывна в точке $y = b$, т. е. если $\lim\limits_{y\to b} f(a, y) = f(a, b)$, то говорят, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $A(a, b)$ *по переменной y.*

Рассмотрим теперь отрезок прямой $y = b$, содержащий точку $A(a, b)$ и содержащийся в (P). Станем рассматривать функцию $u = f(x, y)$ в точках упомянутого отрезка. Получим $u = f(x, b)$. Это — функция одной переменной x. Если функция $f(x, b)$ непрерывна в точке $x = a$, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x, b) = f(a, b)$, то говорят, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $A(a, b)$ *по переменной x.*

Непрерывность функции $u = f(x,y)$ в точке $A(a,b)$ по совокупности переменных означает, что значение $f(x,y)$ стремится к значению $f(a,b)$, когда точка (x,y) стремится к точке (a,b) с любой стороны и, в частности, вдоль параллели оси Oy или оси Ox. Следовательно, будут справедливы равенства

$$\lim_{y \to b} f(a,y) = f(a,b); \quad \lim_{x \to a} f(x,b) = f(a,b).$$

Таким образом, приходим к выводу, что функция $f(x,y)$, непрерывная в точке $A(a,b)$ по совокупности переменных, будет непрерывна в этой точке и по каждой переменной в отдельности.

Однако из непрерывности функции по каждой переменной в отдельности совсем не обязательно следует ее непрерывность по совокупности переменных. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & \text{там, где } x \cdot y = 0; \\ 5 & \text{там, где } x \cdot y \neq 0. \end{cases}$$

Здесь $f(x,0) \equiv 4$, $x \in (-\infty, +\infty)$; $f(0,y) \equiv 4$, $y \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 4 = f(0,0); \quad \lim_{y \to 0} f(0,y) = 4 = f(0,0).$$

Следовательно, функция $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ непрерывна по каждой переменной в отдельности.

Вместе с тем в точке $O(0,0)$ функция $f(x,y)$ не является непрерывной. Действительно, если взять, например, последовательность точек, лежащих на прямой $y = x$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, т. е. удовлетворяющих условию $y_k = x_k$ и стремящихся к точке $O(0,0)$, то получим $f(x_k, y_k) = 5$ для любого $k \in \mathbf{N}$ и, следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = 5 \neq f(0,0)$.

§6. Свойства непрерывных функций нескольких переменных

I. Теорема о стабильности знака. Пусть функция $u = f(M)$ задана в параллелепипеде $(P) \subset \mathbf{R}^n$ и пусть точка $M_0 \in (P)$. Пусть $f(M_0) > 0$. Тогда, если $f(M)$ непрерывна в точке M_0, то существует $\delta > 0$, такое, что для любой точки $M \in U_\delta(M_0)$ будет:

$$f(M) > 0.$$

Здесь $U_\delta(M_0)$ — либо открытая сфера: $\rho(M, M_0) < \delta$, либо открытый параллелепипед: $\begin{cases} |x_1 - x_{10}| < \delta, \\ |x_2 - x_{20}| < \delta, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ |x_n - x_{n0}| < \delta \end{cases}$ (предполагается, что $U_\delta(M_0) \subset (P)$).

▶ Пусть $f(M_0) = h$ ($h > 0$). По условию, функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0. Это означает, что любому числу $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = \frac{h}{2} > 0$) отвечает $\delta > 0$, такое, что для любой точки $M \in U_\delta(M_0)$ будет $|f(M) - f(M_0)| < \frac{h}{2}$ (считаем, что $U_\delta(M_0) \subset (P)$), т. е. для любой точки $M \in U_\delta(M_0)$: $f(M_0) - \frac{h}{2} < f(M) < f(M_0) + \frac{h}{2} \Rightarrow$ в частности,

$$f(M) > f(M_0) - \frac{h}{2} = h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} > 0. \blacktriangleleft$$

Замечание. Справедливо также утверждение:

Если $f(M_0) < 0$ и функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0, то существует $U_\delta(M_0) \subset (P)$, такая, что для любой точки $M \in U_\delta(M_0)$ будет $f(M) < 0$.

II. Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ заданы на множестве E ($E \subset \mathrm{R}^n$). Пусть точка A — предельная для множества E и $A \in E$. Тогда, если функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в точке A, то в этой точке A будут непрерывны и следующие функции:

α) $s(M) = f(M) \pm g(M)$,

β) $p(M) = f(M) \cdot g(M)$,

γ) $q(M) = \dfrac{f(M)}{g(M)}$ (при условии, что $g(A) \neq 0$).

Предлагается доказать это самостоятельно в качестве упражнения.

III. Теорема о непрерывности сложной функции. Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве E ($E \subset \mathbf{R}^2$). Пусть функции $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$ определены на множестве T ($T \subset \mathbf{R}^3$) и такие, что для любой точки (u,v,w) из T оказывается: точка $(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w)) \in E$. Тогда на множестве T имеет смысл суперпозиция $f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w)) = F(u,v,w)$. Пусть функции $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$ непрерывны в точке $(\alpha,\beta,\gamma) \in T$. Пусть $\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = a$, $\psi(\alpha,\beta,\gamma) = b$ (ясно, что точка $(a,b) \in E$). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в точке (a,b). Тогда сложная функция $F(u,v,w)$ непрерывна в точке (α,β,γ).

▶ Возьмем последовательность точек $\{(u_k, v_k, w_k)\}_{k\in\mathrm{N}}$ — любую, но такую, что точки $(u_k, v_k, w_k) \in T$ при любом $k \in \mathrm{N}$, и $(u_k, v_k, w_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (\alpha,\beta,\gamma)$. Тогда, в силу непрерывности функций $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$ в точке (α,β,γ) будет: $x_k = \varphi(u_k, v_k, w_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi(\alpha,\beta,\gamma) = a$, $y_k = \psi(u_k, v_k, w_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \psi(\alpha,\beta,\gamma) = b$. Подчеркнем, что при любом $k \in \mathrm{N}$ точки $(x_k, y_k) \in E$ и что $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (a,b)$. Отсюда, в силу непрерывности функции $f(x,y)$ в точке (a,b), получаем

$$f(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(a,b) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(\varphi(u_k, v_k, w_k), \psi(u_k, v_k, w_k)) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\varphi(\alpha,\beta,\gamma), \psi(\alpha,\beta,\gamma)),$$

т. е. $F(u_k, v_k, w_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(\alpha,\beta,\gamma)$. А это означает, что функция $F(u,v,w)$ непрерывна в точке (α,β,γ). ◀

Замечание. Теорема о непрерывности сложной функции рассмотрена для случая трех независимых переменных и двух промежуточных аргументов. Совершенно аналогично эта теорема формулируется и доказывается для случая, когда имеется m

независимых переменных и n промежуточных аргументов (m и n — любые конечные натуральные числа).

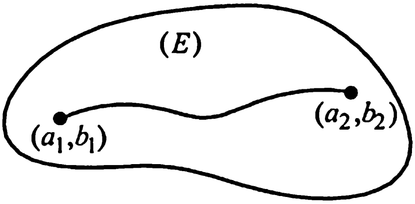


Рис. 1.4

IV. Теорема Коши о промежуточном значении. Пусть функция $u = f(M)$ определена и непрерывна на связном множестве E ($E \subset \mathbf{R}^n$). Тогда, приняв на E два неравных значения, функция $f(M)$ примет на E и любое промежуточное значение.

▶ Доказательство проведем для случая, когда $n = 2$. Пусть (a_1, b_1) и (a_2, b_2) — точки из E, любые, но такие, что $f(a_1, b_1) = \gamma_1$, $f(a_2, b_2) = \gamma_2$, причем $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Пусть, для определенности, $\gamma_1 < \gamma_2$. Возьмем число γ — любое, но такое, что $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. Теорема будет доказана, если показать, что на множестве E обязательно найдется точка (a, b), такая, что $f(a, b) = \gamma$.

Соединим точки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) непрерывной кривой (K), все точки которой принадлежат E. Это сделать можно, так как, по условию, множество E — связное. Но провести такую кривую (K) означает построить две функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, определенные и непрерывные на промежутке $[t_1, t_2]$ и такие, что

$$\varphi(t_1) = a_1, \quad \varphi(t_2) = a_2,$$
$$\psi(t_1) = b_1, \quad \psi(t_2) = b_2,$$

и чтобы для любого $t \in [t_1, t_2]$ было: точка $(\varphi(t), \psi(t)) \in E$.

У нас $u = f(x, y)$. Подставив здесь вместо x и y их выражения через t, получим $u = f(\varphi(t), \psi(t)) = F(t)$. Функция $F(t)$ есть функция одной переменной t, определенная и непрерывная в промежутке $[t_1, t_2]$, как суперпозиция непрерывных функций. Имеем:

$$F(t_1) = f(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = f(a_1, b_1) = \gamma_1,$$

$$F(t_2) = f(\varphi(t_2), \psi(t_2)) = f(a_2, b_2) = \gamma_2, \quad \text{где } \gamma_1 \neq \gamma_2.$$

32

Видим, что функция $F(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши о промежуточном значении, доказанной ранее при установлении свойств непрерывной функции одной переменной. По этой теореме в промежутке (t_1, t_2) обязательно найдется хотя бы одна точка t^*, такая, что будет $F(t^*) = \gamma$, т. е. $f\big(\varphi(t^*), \psi(t^*)\big) = \gamma$. Теперь остается положить $\varphi(t^*) = a$, $\psi(t^*) = b$ и заметить, что точка $(a, b) \in E$. ◀

V. Первая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(M)$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве E ($E \subset \mathbf{R}^n$), то множество $\{f(M)\}_{M \in E}$ является ограниченным.

▶ Покажем, например, что множество $\{f(M)\}_{M \in E}$ ограничено сверху. Рассуждаем от противного. Предположим, что множество $\{f(M)\}_{M \in E}$ не является ограниченным сверху. Но тогда не может оказаться, чтобы для всех точек $M \in E$ было: $f(M) \le 1$. Следовательно, на множестве E обязательно найдется хотя бы одна точка M_1, такая, что

$$f(M_1) > 1.$$

По той же причине не может оказаться, чтобы для всех точек $M \in E$ было: $f(M) \le 2$. Следовательно, на множестве E обязательно найдется хотя бы одна точка M_2, такая, что

$$f(M_2) > 2.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к выводу, что на множестве E обязательно найдется хотя бы одна точка M_k, такая, что

$$f(M_k) > k,$$

где k — любое натуральное число.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность точек $\{M_k\}_{k \in \mathbf{N}}$, обладающую свойством:

$$\text{для любого } k \in \mathbf{N}:\ M_k \in E \ \text{ и } \ f(M_k) > k. \qquad (1)$$

Отметим, что последовательность $\{M_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ — ограниченная, ибо таково множество E. Следовательно, по принципу выбора из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть это будет $\{M_{k_m}\}_{m \in \mathbf{N}}$ и пусть $M_{k_m} \xrightarrow[m \to \infty]{} A$.

Подчеркнем, что точка $A \in E$. Если допустить, что точка $A \notin E$, то мы придем к противоречию. В самом деле, у нас получена последовательность $\{M_{k_m}\}_{m \in \mathrm{N}}$, такая, что для любого $m \in \mathrm{N}$: $M_{k_m} \in E$, $M_{k_m} \neq A$ (ибо, по допущению, $A \notin E$) и $M_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$. Это означает, что точка A — предельная точка множества E. У нас, по условию, множество E — замкнутое. Следовательно, оно содержит все свои предельные точки. В частности, должно быть: точка $A \in E$. Таким образом, предположение $A \notin E$ приводит к тому, что множество E не является замкнутым, а это не так.

По условию функция $f(M)$ — непрерывная на множестве E. Значит, в частности, $f(M)$ — непрерывная в точке A. Но тогда из того, что $M_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$, следует, что

$$f(M_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(A). \tag{2}$$

С другой стороны, из соотношения (1) вытекает, что для любого $m \in \mathrm{N}$:

$$f(M_{k_m}) > k_m \quad \Rightarrow \quad f(M_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty. \tag{3}$$

Сопоставляя соотношения (2) и (3), видим, что получено противоречие. К этому противоречию мы пришли, предположив, что множество $\{f(M)\}_{M \in E}$ не является ограниченным сверху. Значит, наше предположение оказалось неверным. ◀

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что множество $\{f(M)\}_{M \in E}$ ограничено снизу.

VI. Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(M)$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве E ($E \subset \mathrm{R}^n$), то она достигает на E своих наибольшего и наименьшего значений.

▶ Покажем, что $f(M)$ достигает на E своего наибольшего значения. По первой теореме Вейерштрасса множество $\{f(M)\}_{M \in E}$ — ограниченное. Но тогда, как известно, существует $\sup\limits_{M \in E}\{f(M)\}$. Пусть $\gamma = \sup\limits_{M \in E}\{f(M)\}$. Мы докажем, что $f(M)$ достигает на E своего наибольшего значения, если покажем, что на E

имеется хотя бы одна точка M_0, такая, что $f(M_0) = \gamma$. Рассуждаем от противного.

Предположим, что на множестве E такой точки M_0, в которой $f(M_0) = \gamma$, нет. Но тогда для любой точки $M \in E$ будет $f(M) < \gamma \Rightarrow \gamma - f(M) > 0$ для любой точки $M \in E$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$\varphi(M) = \frac{1}{\gamma - f(M)}, \quad M \in E.$$

Замечаем, что функция $\varphi(M)$ определена и непрерывна на E как отношение двух непрерывных функций со знаменателем, не обращающимся в нуль. Ясно, далее, что $\varphi(M) > 0$, $M \in E$.

Так как для функции $\varphi(M)$ на множестве E выполнены условия первой теоремы Вейерштрасса, то заключаем, что множество $\{\varphi(M)\}_{M \in E}$ является ограниченным. В частности, это множество ограничено сверху, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для любой точки $M \in E$ будет: $\varphi(M) \le L \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma - f(M)} \le L$, откуда $\gamma - f(M) \ge \frac{1}{L} \Leftrightarrow f(M) \le \gamma - \frac{1}{L}$, для любой точки $M \in E$. Последнее означает, что число $\left(\gamma - \frac{1}{L}\right)$ является верхней границей множества $\{f(M)\}_{M \in E}$. Но это невозможно, ибо у нас $\gamma = \sup\limits_{M \in E}\{f(M)\}$ и любое число, меньшее чем γ, не может быть верхней границей множества $\{f(M)\}_{M \in E}$. Видим, что пришли к противоречию. Это противоречие мы получили, предположив, что на множестве E нет такой точки M_0, в которой $f(M_0) = \gamma$. Значит, на множестве E имеется хотя бы одна точка M_0, в которой $f(M_0) = \gamma$. ◀

Совершенно аналогично устанавливается, что на множестве E имеется хотя бы одна точка $\tilde{M}_0$, в которой функция $f(M)$ принимает свое наименьшее значение.

§7. Понятие равномерной непрерывности функции нескольких переменных. Теорема Кантора

Определение. Пусть функция $f(M)$ определена на множестве E ($E \subset \mathbf{R}^n$). Функцию $f(M)$ называют *равномерно непрерывной* на множестве E, если любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек $\tilde{M}$ и $\tilde{\tilde{M}}$ из E, для которых $\rho(\tilde{M}, \tilde{\tilde{M}}) < \delta$, оказывается $\left|f(\tilde{\tilde{M}}) - f(\tilde{M})\right| < \varepsilon$.

Или:

Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют равномерно непрерывной на множестве E, если любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ и $(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{x}}_n)$ из E, для которых

$$\begin{aligned} &|\tilde{\tilde{x}}_1 - \tilde{x}_1| < \delta, \\ &|\tilde{\tilde{x}}_2 - \tilde{x}_2| < \delta, \\ &\quad . \quad . \quad . \\ &|\tilde{\tilde{x}}_n - \tilde{x}_n| < \delta, \end{aligned}$$

оказывается $\left|f(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{x}}_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)\right| < \varepsilon$.

Теорема Кантора. Если функция $f(M)$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве E ($E \subset \mathbf{R}^n$), то она равномерно непрерывна на этом множестве E.

▶ От противного. Предположим, что $f(M)$ не является равномерно непрерывной на E. Это означает, что не всякому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции $f(M)$. Следовательно, существует хотя бы одно число $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, такое, которому не отвечает никакое число $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции.

Возьмем $\delta_1 = 1$ (> 0). Не может оказаться, чтобы для всех пар точек M' и M'' из E, для которых $\rho(M', M'') < \delta_1$, было бы $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon_0$ (иначе взятое число $\delta_1 > 0$ отвечало бы ε_0 в смысле определения равномерной непрерывности функции). Следовательно, на множестве E обязательно найдется хотя бы одна пара точек M_1' и M_1'', такая, что хотя $\rho(M_1', M_1'') < \delta_1$, однако $|f(M_1'') - f(M_1')| \geq \varepsilon_0$.

Возьмем $\delta_2 = \frac{1}{2}$ (> 0). Не может оказаться, чтобы для всех пар точек M' и M'' из E, для которых $\rho(M', M'') < \delta_2$, было бы $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon_0$ (иначе взятое число $\delta_2 > 0$ отвечало бы числу $\varepsilon_0 > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции). Следовательно, на множестве E обязательно найдется хотя бы одна пара точек M_2' и M_2'', такая, что хотя $\rho(M_2', M_2'') < \delta_2$, однако $|f(M_2'') - f(M_2')| \geq \varepsilon_0$.

Продолжаем этот процесс аналогичным образом дальше. Возьмем $\delta_k = \frac{1}{k}$ $(> 0;\ k \in \mathrm{N}$ и $k > 2)$. По той же причине, что и выше, не может оказаться, чтобы для всех пар точек M' и M'' из E, для которых $\rho(M', M'') < \delta_k$, было бы $|f(M'') - f(M')| < \varepsilon_0$. Следовательно, на множестве E обязательно найдется хотя бы одна пара точек M_k' и M_k'', такая, что хотя $\rho(M_k', M_k'') < \delta_k$, однако $|f(M_k'') - f(M_k')| \geq \varepsilon_0$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы выстроим две последовательности точек:

$$\{M_k'\}_{k \in \mathrm{N}} \tag{1}$$

и

$$\{M_k''\}_{k \in \mathrm{N}}. \tag{2}$$

Эти последовательности обладают следующими свойствами: для любого $k \in \mathrm{N}$

1) $M_k' \in E$ и $M_k'' \in E$,

2) $\rho(M_k', M_k'') < \frac{1}{k}$,

3) $|f(M_k'') - f(M_k')| \geq \varepsilon_0$.

Отметим, что последовательности (1) и (2) — ограниченные, ибо таково множество E. По принципу выбора, из последовательности (1) можно выделить подпоследовательность

$$\left\{M'_{k_m}\right\}_{m\in\mathrm{N}}, \qquad (\tilde{1})$$

имеющую предел. Пусть $M'_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$. Отметим, что, в силу замкнутости множества E, точка $A \in E$ (это устанавливается так же, как и при доказательстве первой теоремы Вейерштрасса). Из последовательности (2) выделим подпоследовательность

$$\left\{M''_{k_m}\right\}_{m\in\mathrm{N}}. \qquad (\tilde{2})$$

Подпоследовательность $(\tilde{2})$ выделяется из последовательности (2) не по принципу выбора, а так, чтобы индексы элементов $(\tilde{2})$ совпадали с индексами элементов $(\tilde{1})$. Покажем, что подпоследовательность $(\tilde{2})$ сходится к той же точке A. В самом деле, имеем

$$0 \le \rho(M''_{k_m}, A) \le \rho(M''_{k_m}, M'_{k_m}) + \rho(M'_{k_m}, A)$$

(неравенство треугольника). Имеем: $\rho(M''_{k_m}, M'_{k_m}) < \dfrac{1}{k_m} \Rightarrow$ $\rho(M''_{k_m}, M'_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$; $\rho(M'_{k_m}, A) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Но тогда $\rho(M''_{k_m}, A) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, т. е. $M''_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$.

Итак, получили $M'_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$ и $M''_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$, причем точка $A \in E$. По условию функция $f(M)$ — непрерывная на множестве E. Следовательно, в частности, $f(M)$ — непрерывная в точке A. А тогда из того, что $M'_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$, $M''_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A$, следует: $f(M'_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(A)$, $f(M''_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(A)$, а значит, $\left(f(M''_{k_m}) - f(M'_{k_m})\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Последнее означает, что любому числу $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$) отвечает номер N ($N \in \mathrm{N}$), такой, что как только $m > N$, так сейчас же

$$\left|f(M''_{k_m}) - f(M'_{k_m})\right| < \varepsilon_0. \qquad (3)$$

Но у нас по свойству 3 построенных последовательностей при любом m должно быть

$$\left|f(M''_{k_m}) - f(M'_{k_m})\right| \ge \varepsilon_0. \qquad (4)$$

Сопоставляя соотношения (3) и (4), видим, что получено противоречие. К этому противоречию мы пришли, предположив, что функция $f(M)$ не является равномерно непрерывной на E. Следовательно, наше предположение оказалось неверным, а значит, функция $f(M)$ — равномерно непрерывная на множестве E. ◀

§8. Примеры и задачи

Пример 1. Определить и изобразить область существования функции $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$.

Решение. Должно быть

$$\begin{cases} 1-x^2 \ge 0, \\ y^2-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 1, \\ y^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 1, \\ |y| \ge 1. \end{cases}$$

Пример 2. Определить и изобразить область существования функции $u = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

Решение. Должно быть

$$(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2-1 \ge 0, \\ 4-x^2-y^2 \ge 0, \end{cases}$$

так как система $\begin{cases} x^2+y^2-1 \le 0, \\ 4-x^2-y^2 \le 0 \end{cases}$ несовместна. Следовательно, должно быть $1 \le x^2+y^2 \le 4$. Это — замкнутое круговое кольцо, ограниченное окружностями радиусов 1 и 2 с центрами в точке $O(0, 0)$.

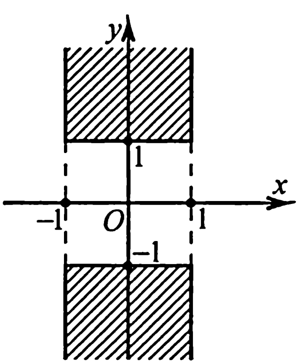


Рис. 1.5. К примеру 1

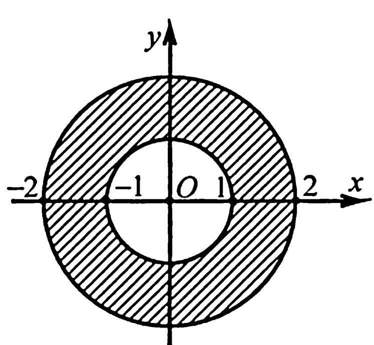


Рис. 1.6. К примеру 2

Пример 3. Определить и изобразить область существования функции $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

Решение. Должно быть $\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x\ge 0,\\ 2x-x^2-y^2>0,\end{cases}$

так как система $\begin{cases} x^2+y^2-x\le 0,\\ 2x-x^2-y^2<0\end{cases}$ несовместна. Следовательно, должно быть $x\le x^2+y^2<2x$. Это — луночка, ограниченная окружностями (γ_1): $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ и (γ_2): $(x-1)^2+y^2=1$. При этом точки окружности (γ_1), кроме точки $O(0,0)$, входят в состав области существования функции, а точки окружности (γ_2) — не входят.

Пример 4. Определить и изобразить область существования функции $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

Решение. Должно быть:

$$1-(x^2+y)^2\ge 0 \Leftrightarrow (x^2+y)^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le x^2+y\le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1-x^2\le y\le 1-x^2.$$

Это — часть плоскости Oxy, расположенная между параболами: $y+1=-x^2$ и $y-1=-x^2$. При этом точки обеих парабол входят в состав области существования функции.

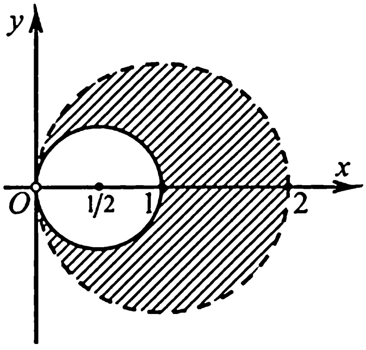


Рис. 1.7. К примеру 3

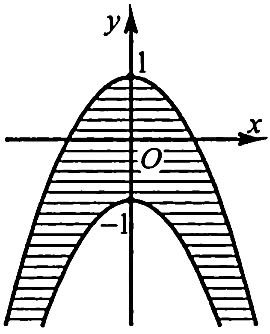


Рис. 1.8. К примеру 4

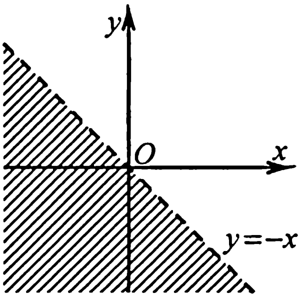


Рис. 1.9. К примеру 5

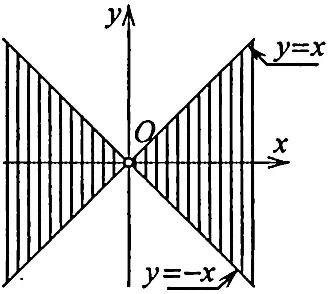


Рис. 1.10. К примеру 6

Пример 5. Определить и изобразить область существования функции $u = \ln(-x - y)$.

Решение. Должно быть:

$$-x - y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y < -x.$$

Это часть плоскости Oxy, расположенная ниже прямой $y = -x$. Точки самой прямой $y = -x$ не входят в область существования заданной функции.

Пример 6. Определить и изобразить область существования функции $u = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

Решение. Должно быть: $-1 \le \dfrac{y}{x} \le 1$ и $x \ne 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} \ge -1, \\ \dfrac{y}{x} \le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{для } x > 0: \begin{cases} y \ge -x, \\ y \le x, \end{cases} \quad \text{а для } x < 0: \begin{cases} y \le -x, \\ y \ge x. \end{cases}$$

Точка $O(0,0)$ исключается (у нас должно быть $x \ne 0$).

Пример 7. Определить и изобразить область существования функции $u = \arccos\dfrac{x}{x+y}$.

Решение. Должно быть: $-1 \le \dfrac{x}{x+y} \le 1$ и $x + y \ne 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1) \text{ если } (x+y) > 0\text{, то: } \begin{cases} -(x+y) \le x, \\ (x+y) \ge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge -x, \\ x + y \ge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -2x, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

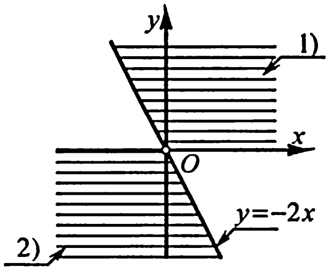


Рис. 1.11. К примеру 7

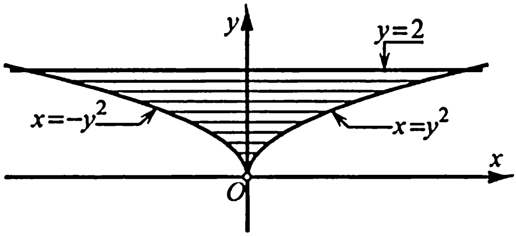


Рис. 1.12. К примеру 8

2) если $(x+y)<0$, то

$$\begin{cases} -(x+y)\ge x, \\ (x+y)\le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\le -x, \\ x+y\le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le -2x, \\ y\le 0. \end{cases}$$

Точка $O(0,0)$ исключается, так как в этой точке $x+y=0$.

Пример 8. Определить и изобразить область существования функции $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

Решение. Должно быть:

$$\begin{cases} -1\le \dfrac{x}{y^2}\le 1, \\ -1\le 1-y\le 1, \\ y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2\le x\le y^2, \\ 0\le y\le 2, \\ y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\ge x, \\ y^2\ge -x, \\ 0<y\le 2. \end{cases}$$

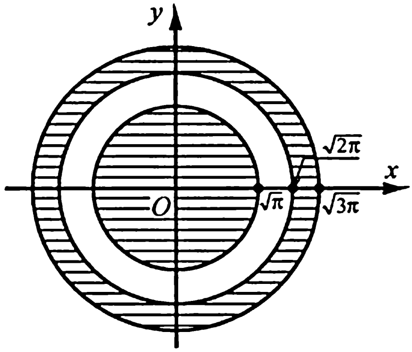


Рис. 1.13. К примеру 9

Пример 9. Определить и изобразить область существования функции $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

Решение. Должно быть:

$$\sin(x^2+y^2)\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2k\pi\le x^2+y^2\le$$

$$\le(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\dots).$$

Это — семейство концентрических колец.

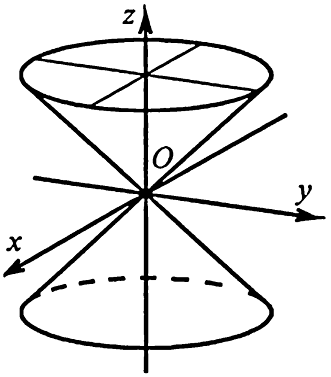


Рис. 1.14. К примеру 10

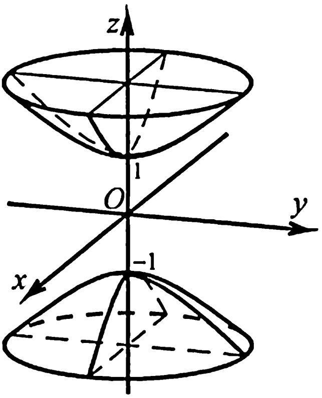


Рис. 1.15. К примеру 12

Пример 10. Определить и изобразить область существования функции $u = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Должно быть: $-1 \le \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$ и $x^2+y^2 \ne 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad x^2+y^2 \ne 0.$$

Это — внешность конуса $z^2 = x^2 + y^2$. В область существования входит поверхность, ограничивающая конус, за исключением точки $O(0, 0, 0)$.

Пример 11. Определить область существования функции $u = \ln(xyz)$.

Решение. Должно быть: $xyz > 0$. Это будет иметь место в случаях, когда:

1) $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$; 2) $x < 0,\ y < 0,\ z > 0$;

3) $x < 0,\ y > 0,\ z < 0$; 4) $x > 0,\ y < 0,\ z < 0$.

Геометрически область существования данной функции — совокупность четырех открытых октантов.

Пример 12. Определить и изобразить область существования функции $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

Решение. Должно быть: $-1-x^2-y^2+z^2>0 \Leftrightarrow x^2+y^2-z^2<-1$. Геометрически область существования функции — внутренность двуполостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=-1$.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right)$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right)$. Считаем $x\neq 0$ и $y\neq 0$.

Решение. 1) Имеем при любом закрепленном x:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^2\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)}{y^4\left(\dfrac{x^2}{y^4}+1\right)}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1+\dfrac{x^2}{y^2}}{1+\dfrac{x^2}{y^4}}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right)=0.$$

2) Имеем при любом закрепленном y:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{y^4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{y^2}{x^2}}{1+\dfrac{y^4}{x^2}}=1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right)=1.$$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{x^y}{1+x^y}\right)$ и $\lim\limits_{y\to+0}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^y}{1+x^y}\right)$. Считаем $x>0$ и $y>0$.

Решение. 1) Имеем при любом закрепленном x:

$$\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right)=\frac{1}{2}.$$

2) Имеем при любом закрепленном y:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right)=1.$$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right)$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right)$.

Можно считать $x\neq 0$ и $y\neq 0$.

Решение. 1) Имеем при любом закрепленном x:

$$\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right)=0.$$

2) Имеем при любом закрепленном y:

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{x\cdot\pi}{x\left(2+\frac{y}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi}{2+\frac{y}{x}}=1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right)=1.$$

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right)$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right)$.

Решение. 1) Имеем при любом закрепленном x ($x\neq 0$):

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{xy\left(1+\frac{1}{xy}\right)}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{1}{1+\frac{1}{xy}}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right)=0.$$

2) Имеем при любом закрепленном y ($y\neq 0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\cdot xy=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right)=1.$$

Пример 17. Считая $x\in(0,1)$, $y>0$, найти $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\lim\limits_{y\to +0}\log_x(x+y)\right)$ и $\lim\limits_{y\to +0}\left(\lim\limits_{x\to 1-0}\log_x(x+y)\right)$.

Решение. Так как $\log_x(x+y)=\frac{\ln(x+y)}{\ln x}$, то:

1) При любом закрепленном x ($x \in (0, 1)$) имеем

$$\lim_{y \to +0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1-0}\left(\lim_{y \to +0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right) = 1 .$$

2) При любом закрепленном y ($y > 0$) имеем

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \to +0}\left(\lim_{x \to 1-0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x}\right) = \infty .$$

Пример 18. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$.

Решение. Можно считать $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Так как $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, то $x^2 - xy + y^2 \geq xy$. А тогда при $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$0 \leq \left|\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leq \left|\frac{x+y}{xy}\right| = \left|\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{x}\right| .$$

Следовательно,

$$0 \leq \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left|\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leq \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left(\left|\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{x}\right|\right) = 0 .$$

Значит, $\lim\limits_{\substack{x \to \infty, \\ y \to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0$.

Пример 19. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$.

Решение. Можно считать $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Так как

$$(x^2 - y^2)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \geq 0,$$

то $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$. А тогда при $x \neq 0$, $y \neq 0$:

$$0 \leq \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{x^2 + y^2}{2x^2y^2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2x^2} .$$

Следовательно,

$$0 \le \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \frac{1}{2} \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0.$$

Пример 20. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$ (a — конечное число).

Решение. Положим $xy = t$. Ясно, что $t \to 0$, если $x \to 0$, при любом конечном y. Имеем $\dfrac{\sin xy}{x} = \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot y = \dfrac{\sin t}{t} \cdot y$. А тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{t\to 0 \\ y\to a}} \frac{\sin t}{t} \cdot y = a.$$

Пример 21. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

Решение. Можно считать $x > 0$ и $y > 0$. Имеем

$$(x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}.$$

А тогда

$$0 \le \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} \le \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}\right) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$.

Пример 22. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

Решение. Можно считать $x > 0$ и $y > 0$. Имеем

$$(x-y)^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2xy + y^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \ge 2xy.$$

А тогда $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{2}$. Поэтому $0 < \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$, то получаем из предыдущего неравенства

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

Пример 23. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Решение.

$$(|x|-|y|)^2\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2|x|\cdot|y|+y^2\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2+y^2)\ge 2|x|\cdot|y| \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (x^2+y^2)^2\ge 4x^2y^2 \quad\Rightarrow\quad x^2y^2\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2.$$

Так как $x\to 0$ и $y\to 0$, то будем считать $0<x^2+y^2<1$. А тогда справедливо неравенство

$$1\ge(x^2+y^2)^{x^2y^2}\ge(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}. \qquad (*)$$

Найдем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$. Положим $x^2+y^2=z$. Ясно, что $z\to 0$, если $x\to 0$ и $y\to 0$. Имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}=\lim_{z\to 0}z^{\frac{1}{4}z^2}=\lim_{z\to 0}e^{\frac{1}{4}z^2\ln z}.$$

Так как $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{4}\frac{\ln z}{1/z^2}=\frac{1}{4}\lim\limits_{z\to 0}\frac{1/z}{-2/z^3}=0$, то $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{4}z^2\ln z}=1$, т. е. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}=1$. А тогда из неравенства (*) $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1$.

Пример 24. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ (a — конечное число).

Решение. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e^{\frac{x}{x+y}\cdot x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$. Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} e^{\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e.$$

Пример 25. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\ln(x+e^y)=\ln 2$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=1$ $(\neq 0)$.

Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2.$$

Пример 26. По каким направлениям φ существует конечный предел $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$, если $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$?

Решение. Имеем $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$. Этот предел будет конечным, когда $\cos\varphi\le 0$, т. е. когда $\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}$.

Пример 27. По каким направления φ существует конечный предел $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin 2xy$, если $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$?

Решение. Имеем $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin 2xy=\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$.

Так как $\rho^2\to+\infty$ при $\rho\to+\infty$, а $\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ — ограниченная функция, то предел будет конечным, если $\cos 2\varphi<0$.

Предел будет конечным также тогда, когда $\sin 2\varphi=0$. Следовательно, предел будет конечным, когда $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right)$ и когда $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

Пример 28. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{если} \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

непрерывна в точке $O(0,0)$ по каждой переменной x и y в отдельности, но не является непрерывной в этой точке по совокупности переменных.

Решение. 1) Рассмотрим отрезок прямой $x=0$, содержащий точку $O(0,0)$. Станем рассматривать функцию $f(x,y)$ в точках этого отрезка. Получим

$$f(x,y)\big|_{x=0}=\left.\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|_{x=0}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0).$$

Значит, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной y.

2) Рассмотрим теперь отрезок прямой $y=0$, содержащий точку $O(0,0)$. В точках этого отрезка будем иметь

$$f(x,y)\big|_{y=0}=\left.\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|_{y=0}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0).$$

Следовательно, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$ по переменной x.

3) Покажем теперь, что $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ не является непрерывной по совокупности переменных (у $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ не существует даже $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$). Для этого возьмем две последовательности точек: $\left.\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}\right|_{k\in\mathbb{N}}$ и $\left.\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right)\right\}\right|_{k\in\mathbb{N}}$. Обе эти последовательности при $k\to\infty$ сходятся к точке $O(0,0)$. Соответствующие им последовательности значений функции сходятся при $k\to\infty$ к различным предельным значениям:

$$f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)=\frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}\xrightarrow[k\to\infty]{}1;\qquad f\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right)=\frac{\frac{4}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{4}{k^2}}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{4}{5}.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует. Следовательно, равенство $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)$ невозможно.

Пример 29. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{если}\quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

в точке $O(0,0)$ непрерывна вдоль каждого луча $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ $t\in[0,+\infty)$, проходящего через точку $O(0,0)$, но не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности переменных.

Решение. Имеем $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\dfrac{t\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$. Видим, что при $\alpha=k\cdot\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,1,2,3,4)$ $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)\equiv 0$. Значит, при этих значениях α: $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0=f(0,0)$.

Пусть $0<\alpha<2\pi$ и $\alpha\neq k\cdot\dfrac{\pi}{2}$ $(k=1,2,3)$. Тогда $t^2\cos^4\alpha+$ $+\sin^2\alpha>0$ и $\lim\limits_{t\to 0}(t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha>0$. Получаем, следовательно,

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0=f(0,0).$$

Таким образом, вдоль любого луча, проходящего через точку $O(0,0)$, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$.

Покажем теперь, что $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$ по совокупности переменных (т. е. не является непрерывной в точке $(0,0)$ в обычном смысле). Для этого возьмем, например, последовательность точек $\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ясно, что эта последовательность при $k\to\infty$ сходится к точке $O(0,0)$. Соответствующая последовательность значений функции

$$\left\{f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^4}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1}{2}\right\}_{k\in\mathbb{N}}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{2}\neq f(0,0).$$

Следовательно, функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$ в обычном смысле.

Пример 30. Исследовать на равномерную непрерывность линейную функцию $u=2x-3y+5$ на всей плоскости Oxy.

Решение. Возьмем $\varepsilon>0$ — любое. Пусть (x_1,y_1) и (x_2,y_2) — любые две точки плоскости Oxy. Имеем

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|=|2(x_2-x_1)-3(y_2-y_1)|\le 2|x_2-x_1|+3|y_2-y_1|$$

Рассмотрим неравенство $2|x_2-x_1|+3|y_2-y_1|<\varepsilon$. Легко видеть, что если в качестве числа $\delta>0$ взять $\delta=\frac{\varepsilon}{6}$, то будем иметь: для любого положения точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) на плоскости, для которых $|x_2-x_1|<\delta$ и $|y_2-y_1|<\delta$, оказывается: $|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

Вывод. Заданная функция равномерно непрерывна на всей плоскости.

Пример 31. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $u=\sqrt{x^2+y^2}$ на всей плоскости Oxy.

Решение. Возьмем $\varepsilon>0$ — любое. Пусть (x_1,y_1) и (x_2,y_2) — любые две точки плоскости Oxy. Имеем

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|=\left|\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right|=$$

$$=\frac{|x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{|(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(y_2-y_1)(y_2+y_1)|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\le$$

$$\le\frac{|x_2-x_1|\cdot|x_2+x_1|+|y_2-y_1|\cdot|y_2+y_1|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=$$

$$=\frac{|x_2-x_1|\cdot|x_2+x_1|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+\frac{|y_2-y_1|\cdot|y_2+y_1|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2}}<$$

$$<|x_2-x_1|\cdot\frac{|x_2|+|x_1|}{\sqrt{x_2^2}+\sqrt{x_1^2}}+|y_2-y_1|\cdot\frac{|y_2|+|y_1|}{\sqrt{y_2^2}+\sqrt{y_1^2}}=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

Рассмотрим неравенство $|x_2-x_1|+|y_2-y_1|<\varepsilon$. Видим, что если в качестве числа $\delta>0$ взять $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, то для любого положения точек (x_1,y_1) и (x_2,y_2) на плоскости, для которых $|x_2-x_1|<\delta$ и $|y_2-y_1|<\delta$ будет:

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Вывод. Заданная функция $u=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ равномерно непрерывна на всей плоскости Oxy.

Пример 32. Будет ли равномерно непрерывной функция $u=f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ в области $x^2+y^2<1$?

Решение. Мы установим, что функция $f(x,y)=\sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ не является равномерно непрерывной в круге $x^2+y^2<1$, если покажем, что существует хотя бы одно число $\varepsilon>0$, которому не отвечает никакое $\delta>0$ в смысле определения равномерной непрерывности.

Возьмем, например, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ (>0) и покажем, что ему не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции $f(x,y)$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что такое $\delta > 0$ есть. Обозначим его через δ_0 (>0). Возьмем две последовательности точек:

$$\left\{\tilde{M}_k(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\right\}_{k\in N} = \left\{\tilde{M}_k\left(\sqrt{1-\frac{1}{2k}}\cos\varphi, \sqrt{1-\frac{1}{2k}}\sin\varphi\right)\right\}_{k\in N},$$

$$0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$\left\{\tilde{\tilde{M}}_k(\tilde{\tilde{x}}_k, \tilde{\tilde{y}}_k)\right\}_{k\in N} = \left\{\tilde{\tilde{M}}_k\left(\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}}\cos\varphi, \sqrt{1-\frac{2}{1+4k}}\sin\varphi\right)\right\}_{k\in N},$$

$$0 \le \varphi < 2\pi.$$

Имеем

$$\left|\tilde{\tilde{x}}_k - \tilde{x}_k\right| = \left|\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}} - \sqrt{1-\frac{1}{2k}}\right| \cdot |\cos\varphi| \le \left|\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}} - \sqrt{1-\frac{1}{2k}}\right| =$$

$$= \frac{1-\frac{2}{1+4k}-1+\frac{1}{2k}}{\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}}+\sqrt{1-\frac{1}{2k}}} = \frac{\frac{1}{2k(4k+1)}}{\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}}+\sqrt{1-\frac{1}{2k}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Числу $\delta_0 > 0$ отвечает номер N, такой, что при $k > N$ будет $\left|\tilde{\tilde{x}}_k - \tilde{x}_k\right| < \delta_0$. Имеем, далее,

$$\left|\tilde{\tilde{y}}_k - \tilde{y}_k\right| = \left|\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}} - \sqrt{1-\frac{1}{2k}}\right| \cdot |\sin\varphi| \le \left|\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}} - \sqrt{1-\frac{1}{2k}}\right| =$$

$$= \frac{\frac{1}{2k(4k+1)}}{\sqrt{1-\frac{2}{1+4k}}+\sqrt{1-\frac{1}{2k}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Числу $\delta_0 > 0$ отвечает номер N, такой, что при $k > N$ будет $\left|\tilde{\tilde{y}}_k - \tilde{y}_k\right| < \delta_0$. Итак, получили $\left|\tilde{\tilde{x}}_k - \tilde{x}_k\right| < \delta_0$, $\left|\tilde{\tilde{y}}_k - \tilde{y}_k\right| < \delta_0$ при $k > N$. Однако при всех $k \in \mathbf{N}$

$$\left|f(\tilde{\tilde{M}}_k) - f(\tilde{M}_k)\right| = \left|\sin\frac{\pi}{1-\left(1-\frac{2}{1+4k}\right)} - \sin\frac{\pi}{1-\left(1-\frac{1}{2k}\right)}\right| =$$

$$= \left|\sin\frac{\pi(1+4k)}{2} - \underbrace{\sin 2k\pi}_{=0}\right| = 1,$$

т. е.

$$\left|f(\tilde{\tilde{M}}_k) - f(\tilde{M}_k)\right| = 1 > \varepsilon_0 \quad (= \tfrac{1}{2}).$$

Видим, что число $\delta_0 > 0$ не отвечает числу $\varepsilon_0 > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции. Следовательно, числу $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ (> 0) не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции. Значит, функция $f(x,y)$ не является равномерно непрерывной в круге $x^2 + y^2 < 1$.

Пример 33. Дана функция $u = f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$. Является ли эта функция непрерывной в своей области определения $E\,(\subset \mathbf{R}^2)$? Будет ли $f(x,y)$ равномерно непрерывной в E?

Решение. Должно быть $-1 \le \frac{x}{y} \le 1$ и $y \ne 0 \Rightarrow$ $E = \begin{cases} |x| \le |y|, \\ y \ne 0. \end{cases}$ На множестве E функция $f(x,y)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций.

Покажем, что заданная функция $f(x,y)$ не является равномерно непрерывной на множестве E. Это будет сделано, если мы покажем, что существует хотя бы одно число $\varepsilon > 0$, которому не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции $f(x,y)$ на E.

Возьмем, например, число $\varepsilon_0 = 1$ (>0) и покажем, что ему не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции.

Рассуждаем от противного. Предположим, что такое число $\delta > 0$ есть. Обозначим его через δ_0 (>0). Возьмем две последовательности точек:

$$\left\{\tilde{M}_k(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\right\}_{k\in\mathbf{N}} = \left\{\tilde{M}_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbf{N}} \quad \text{и}$$

$$\left\{\tilde{\tilde{M}}_k(\tilde{\tilde{x}}_k, \tilde{\tilde{y}}_k)\right\}_{k\in\mathbf{N}} = \left\{\tilde{\tilde{M}}_k\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathbf{N}}.$$

Имеем

$$\rho(\tilde{M}_k, \tilde{\tilde{M}}_k) = \sqrt{(\tilde{\tilde{x}}_k - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{\tilde{y}}_k - \tilde{y}_k)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right)^2} = \frac{2}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Значит, числу $\delta_0 > 0$ отвечает номер N, такой, что при $k > N$ будет $\rho(\tilde{M}_k, \tilde{\tilde{M}}_k) < \delta_0$. Однако при всех $k \in \mathbf{N}$:

$$\left|f(\tilde{\tilde{M}}_k) - f(\tilde{M}_k)\right| = |\arcsin(-1) - \arcsin 1| = 2\arcsin 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi > \varepsilon_0 \quad (=1).$$

Значит, число $\delta_0 > 0$ не отвечает числу $\varepsilon_0 = 1$ (>0) в смысле определения равномерной непрерывности функции. Следовательно, числу $\varepsilon_0 = 1 > 0$ не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности функции $f(x,y)$. Значит, функция $f(x,y)$ не является равномерно непрерывной на E.

Глава 2

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Частные производные и частные дифференциалы

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в параллелепипеде (P) ($(P) \subset \mathbf{R}^n$), содержащем точку $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

У функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ закрепим все аргументы, кроме первого, т. е. положим $x_2 = x_{20}$, $x_3 = x_{30}$, , $x_n = x_{n0}$, а первому аргументу дадим приращение Δx_1 — любое, но такое, что $\Delta x_1 \neq 0$ и точка $(x_{10} + \Delta x_1, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) \in (P)$. Разность

$$f(x_{10} + \Delta x_1, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$$

называют *частным приращением* функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке M_0, соответствующим приращению Δx_1 аргумента x_1 и обозначают $\Delta_{x_1} u$.

Совершенно аналогично определяется частное приращение функции $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$, соответствующее приращению Δx_k аргумента x_k ($k = \overline{2, n}$). Именно

$$\Delta_{x_k} u = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k-1,0}, x_{k0} + \Delta x_k, x_{k+1,0}, \dots, x_{n0}) -$$
$$- f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}, \dots, x_{n0}).$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$. Это отношение будет представлять собой функцию Δx_k, определенную для всех Δx_k, отличных от нуля и таких, что точка $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k-1,0}, x_{k0} + \Delta x_k, x_{k+1,0}, \dots, x_{n0}) \in (P)$. Если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k},$$

то этот предел называется *частной производной* функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$ по переменной x_k и обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad u'_{x_k}, \quad f'_{x_k}.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$ $(k = \overline{1, n})$.

Заметим, что здесь символы $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ всегда цельные; как дроби их рассматривать нельзя. (В этом имеется различие со случаем функции одной переменной.)

Из определения частной производной функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ следует, что частная производная от функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по какой-либо из переменных есть обычная производная по этой переменной от функции, которая получается из данной, когда все другие переменные считаются постоянными.

Поэтому практически частные производные вычисляются по известным нам формулам и правилам дифференцирования функции одной переменной.

Пример. Пусть $u = x^y$ $(x > 0)$. Для любой точки (x, y), лежащей правее оси Oy, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \text{ (считаем } y = \text{const);}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \text{ (считаем } x = \text{const).}$$

Частными дифференциалами функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по $x_1, x_2, \dots, x_n$ в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ называются величины

$$d_{x_1}u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1, \quad d_{x_2}u = \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2, \quad \dots, \quad d_{x_n}u = \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n.$$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ вычисляются в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Если, как и в случае функции одной переменой, назвать дифференциалами независимых переменных их произвольные приращения, т. е. положить

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \quad \dots, \quad dx_n = \Delta x_n,$$

то для частных дифференциалов функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем иметь

$$d_{x_1}u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1, \quad d_{x_2}u = \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2, \quad \dots, \quad d_{x_n}u = \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Частный дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по какой-либо из переменных есть произведение соответствующей частной производной на дифференциал этой переменной:

$$d_{x_k}u = \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot dx_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

§2. Формула для полного приращения функции нескольких переменных. Дифференцируемость

Получим эту формулу для случая $n = 2$. Итак, пусть $u = f(x, y)$. Будем говорить, что функция $u = f(x, y)$ удовлетворяет условиям s в точке (x_0, y_0), если:

1) $f(x, y)$ определена в прямоугольнике (P), содержащем точку (x_0, y_0);

2) $f(x, y)$ имеет конечные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in (P)$;

3) $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ — непрерывны в точке (x_0, y_0).

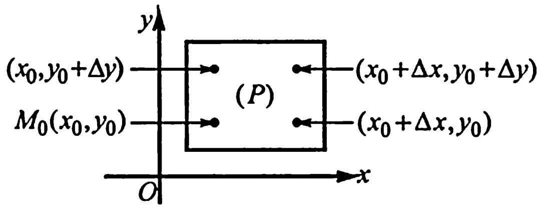


Рис. 2.1

Станем рассматривать именно такую функцию. Выберем и закрепим Δx и Δy — любые, но такие, что точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in (P)$. Ясно, что тогда и точки $(x_0, y_0 + \Delta y)$, $(x_0 + \Delta x, y_0) \in (P)$. Разность $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ называется *полным приращением* функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Запишем выражение для Δf в виде

$$\Delta f = \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\right] + \left[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right]. \tag{1}$$

Замечаем, что разность $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ представляет собой приращение функции $f(x_0, y)$ при изменении y от y_0 до $y_0 + \Delta y$. Подчеркнем, что $f(x_0, y)$ есть функция одного аргумента y, определенная в промежутке $[y_0, y_0 + \Delta y]$.

По условию, в каждой точке $(x,y) \in (P)$ существует конечная $f'_y(x,y)$. Из этого следует, что существует конечная $f'_y(x_0, y)$ в каждой точке промежутка $[y_0, y_0 + \Delta y]$. Видим, что функция $f(x_0, y)$ в промежутке $[y_0, y_0 + \Delta y]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, будем иметь

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) \cdot \Delta y \quad (0 < \theta_1 < 1). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь разность $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)$. Замечаем, что эта разность представляет собой приращение функции $f(x, y_0 + \Delta y)$ при изменении x от x_0 до $x_0 + \Delta x$. Отметим, что $f(x, y_0 + \Delta y)$ есть функция одного аргумента x, определенная в промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$. По условию, в каждой точке $(x,y) \in (P)$ существует конечная $f'_x(x,y)$. Из этого следует, что существует конечная $f'_x(x, y_0 + \Delta y)$ в каждой точке промежутка $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

Видим, что функция $f(x, y_0 + \Delta y)$ в промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, будем иметь

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x$$
$$(0 < \theta_2 < 1). \qquad (3)$$

Теперь, принимая во внимание соотношения (2) и (3), выражение для полного приращения Δf функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть записано в виде

$$\Delta f = f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) \cdot \Delta y. \qquad (4)$$

По условию, $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Поэтому

$$f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \Delta y) \xrightarrow[\rho \to 0]{} f'_x(x_0, y_0),$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) \xrightarrow[\rho \to 0]{} f'_y(x_0, y_0),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. А тогда можно написать:

$$f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,$$
$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

где $\alpha, \beta \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$. Следовательно, будем иметь вместо (4)

$$\Delta f = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (5)$$

где $\alpha, \beta \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$. Формула (5) и есть *формула для полного приращения* Δf функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Установленная формула распространяется на случай функции от любого числа переменных. Именно:

Пусть:

1) функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в параллелепипеде (P), содержащем точку $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$;

2) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет конечные частные производные $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}$ в каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (P)$;

3) $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}$ непрерывны в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Тогда полное приращение Δf функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке M_0 представимо в виде

$$\Delta f = f'_{x_1}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \cdot \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \cdot \Delta x_2 + \dots +$$

$$+ f'_{x_n}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \cdot \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$; $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$.

Определение. Функция $u = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x, y)$ определена в прямоугольнике (P), содержащем точку $M_0(x_0, y_0)$, и если полное приращение Δf этой функции в точке (x_0, y_0) представимо в виде

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \tag{6}$$

где A и B — некоторые постоянные числа, а $\alpha, \beta \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$. В (6) Δx и Δy — любые, но такие, что точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in (P)$.

Справедливы следующие утверждения:

I. Если функция $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяет условиям s, то она дифференцируема в этой точке.

II. Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то она непрерывна в этой точке (бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции).

III. Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то у нее в этой точке существуют конечные частные производные f'_x, f'_y, причем $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

▶ В самом деле, из того, что $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, следует, что $\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, где $\alpha, \beta \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$. Положим здесь $\Delta y = 0$. Будем иметь

$$\Delta f = \Delta_x f = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A.$$

Последнее означает, что $f'_x(x_0, y_0)$ существует и что $f'_x(x_0, y_0) = A$. Совершенно аналогично устанавливается, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует $f'_y(x_0, y_0)$, причем $f'_y(x_0, y_0) = B$. ◀

IV. Если у функции $u = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ существуют конечные $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$, то из этого не следует дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$. Более того, из существования конечных $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ не следует даже непрерывность функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Рассмотрим ***пример***. Пусть $f(x,y) = \begin{cases} 4, & \text{если} \quad x \cdot y = 0; \\ 5, & \text{если} \quad x \cdot y \neq 0. \end{cases}$

У этой функции в точке $O(0,0)$ существуют конечные f'_x, f'_y (именно: $f'_x(0{,}0) = 0$ и $f'_y(0{,}0) = 0$). Однако, как было показано ранее в §5 главы 1, эта функция не является непрерывной в точке $O(0{,}0)$.

Понятие дифференцируемости функции трех и большего числа переменных вводится совершенно аналогично рассмотренному случаю функции двух переменных. Именно:

Функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, если ее приращение Δf, вычисленное для этой точки, представимо в виде

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \dots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \dots + \alpha_n\Delta x_n,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — некоторые постоянные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ (функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ считается определенной в параллелепипеде (P), содержащем точку $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$; $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ — любые, но такие, что точка $(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \dots, x_{n0} + \Delta x_n) \in (P)$).

Заметим, что для функций трех и большего числа переменных остаются справедливыми утверждения I — IV, отмеченные выше для функции двух переменных.

§3. Производные сложных функций

Теорема 1. Пусть функция $u = f(x,y)$ определена в прямоугольнике (P) $((P) \subset \mathbf{R}^2)$ и имеет там непрерывные частные производные $u'_x = f'_x(x,y)$, $u'_y = f'_y(x,y)$. Пусть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены в промежутке (a,b) и имеют там конечные производные $x'_t = \varphi'(t)$, $y'_t = \psi'(t)$. Пусть, далее, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ такие, что для любого $t \in (a,b)$ оказывается, что точка $(\varphi(t), \psi(t)) \in (P)$. Таким образом, имеет смысл суперпозиция $u = f(\varphi(t), \psi(t)) = F(t)$, $t \in (a,b)$. Тогда для любого $t \in (a,b)$ существует конечная производная u'_t, причем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

(Здесь t — независимая переменная; x, y — промежуточные аргументы.)

▶ Возьмем любое t из (a,b) и закрепим. Обозначим его через t_0. Пусть $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$ (ясно, что точка $(x_0, y_0) \in (P)$), $f(x_0, y_0) = u_0$. Дадим t_0 приращение Δt — любое, но такое, что $\Delta t \neq 0$ и точка $t_0 + \Delta t \in (a,b)$.

Пусть $\varphi(t_0 + \Delta t) = x_0 + \Delta x$, $\psi(t_0 + \Delta t) = y_0 + \Delta y$ (ясно, что точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in (P)$), $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = u_0 + \Delta u$. Здесь

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

— полное приращение функции $u = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0). Отметим, что функция $u = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) удовлетворяет условиям s и поэтому для полного приращения Δu справедлива формула

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha, \beta \to 0$ при $\rho \to 0$. А тогда

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x_0, y_0) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x_0, y_0) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{2}$$

По условию, функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют в промежутке (a,b) конечные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Следовательно, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ непрерывны в промежутке (a,b); в частности, непрерывны в точке t_0. Но тогда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ при $\Delta t \to 0 \Leftrightarrow \rho \to 0$, если $\Delta t \to 0 \Rightarrow \alpha, \beta \to 0$, если $\Delta t \to 0$. Переходя в соотношении (2) к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=f'_x(x_0,y_0)\frac{dx}{dt}+f'_y(x_0,y_0)\frac{dy}{dt}.$$

Следовательно, в точке t_0 существует конечная производная $\dfrac{du}{dt}$, причем

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0}=f'_x(x_0,y_0)\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}+f'_y(x_0,y_0)\cdot\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Так как точка t_0 — любая из (a,b), то теорема 1 доказана. ◀

Замечание. В теореме 1 рассмотрен случай, когда независимая переменная — одна, а промежуточных аргументов — два. Совершенно аналогичная теорема имеет место в случае, когда независимая переменная — одна, а промежуточных аргументов три и больше. Именно:

Пусть функция $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ определена в параллелепипеде (P) $((P)\subset\mathbf{R}^n)$ и имеет там непрерывные частные производные $f'_{x_1},f'_{x_2},\dots,f'_{x_n}$. Пусть функции $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$, , $x_n=\varphi_n(t)$ определены в промежутке (a,b) и имеют там конечные производные $\dfrac{d\varphi_1}{dt}$, $\dfrac{d\varphi_2}{dt}$, ..., $\dfrac{d\varphi_n}{dt}$. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ еще и такие, что для любого $t\in(a,b)$ оказывается, что точка $(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t))\in(P)$, так что имеет смысл суперпозиция $u=f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t))=F(t)$, $t\in(a,b)$. Тогда для любого $t\in(a,b)$ существует конечная производная $\dfrac{du}{dt}$, причем

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}. \tag{3}$$

Теорема 2. Пусть функция $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ определена в параллелепипеде (P) $((P)\subset\mathbf{R}^n)$ и имеет там непрерывные частные производные $u'_{x_1}=f'_{x_1}$, $u'_{x_2}=f'_{x_2}$, , $u'_{x_n}=f'_{x_n}$. Пусть функции $x_1=\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $x_2=\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$, , $x_n=\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$

определены в параллелепипеде (P_*) $((P_*) \subset (\mathbf{R}^m))$ и имеют там конечные частные производные

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m}; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_m}; \quad \dots, \quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_m}.$$

Пусть функции $\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$, , $\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$ еще и такие, что для любой точки $(t_1,t_2,\dots,t_m) \in (P_*)$ оказывается, что точка

$$\left(\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m), \varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m), \dots, \varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)\right) \in (P),$$

так что имеет смысл суперпозиция

$$u = f\left(\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m), \varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m), \dots, \varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)\right) = \\ = F(t_1,t_2,\dots,t_m)$$

в (P_*). При этих условиях для каждой точки $(t_1,t_2,\dots,t_m) \in (P_*)$ существуют частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}, \dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial t_m}$, причем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial u}{\partial t_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_m}.
\end{aligned}$$

► Чтобы вычислить $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}$, нужно в каждой из функций $\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$, , $\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$ закрепить переменные $t_2, t_3, \dots, t_m$. Но закрепив $t_2, t_3, \dots, t_m$, мы будем находиться в условиях теоремы 1 (или ее обобщения), т. е. мы получим сложную функцию одной независимой переменной t_1. Следовательно, существует конечная $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_1}.$$

Мы воспользовались формулой (3). Только вместо $\frac{du}{dt}$ следует писать $\frac{\partial u}{\partial t_1}$, а вместо $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ..., $\frac{dx_n}{dt}$ — писать соответственно $\frac{\partial x_1}{\partial t_1}$, $\frac{\partial x_2}{\partial t_1}$, ..., $\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$.

Чтобы вычислить $\frac{\partial u}{\partial t_k}$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$, нужно в каждой из функций $\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, , $\varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ закрепить все переменные, кроме t_k, а затем дифференцировать полученную сложную функцию одной переменной t_k. А тогда по теореме 1 (или ее обобщению) заключаем, что существует конечная $\frac{\partial u}{\partial t_k}$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_k} \quad (k = 2, 3, \ldots, m). \blacktriangleleft$$

§4. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в прямоугольнике (P) $((P) \subset \mathbf{R}^2)$, содержащем точку (x_0, y_0). Пусть функция $u = f(x, y)$ — дифференцируемая в точке (x_0, y_0). Возьмем Δx и Δy — любые, но такие, чтобы точка $(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) \in (P)$. Выражение

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot\Delta y \qquad (1)$$

называется *полным дифференциалом* функции $u = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и обозначается символом $df(x_0, y_0)$ (или $du(x_0, y_0)$).

Итак, по определению

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot\Delta y. \qquad (2)$$

Видим, что $df(x_0,y_0)$ зависит от четырех не связанных между собой величин: x_0, y_0, Δx, Δy. Если вспомнить, что дифференциалы независимых переменных совпадают с их произвольными приращениями, т. е.

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y,$$

то соотношение (2) может быть записано в виде

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot dx + f'_y(x_0,y_0)\cdot dy$$

$$\left(\text{или} \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right). \qquad (3)$$

Видим, что полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов, т. е. $du = d_x u + d_y u$.

Ранее (см. §2) была выведена формула для полного приращения Δf функции $u = f(x,y)$, дифференцируемой в точке (x_0,y_0). Было получено

$$\Delta f = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y,$$

где $\alpha,\beta \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Теперь, принимая во внимание (2), эту формулу можно записать так:

$$\Delta f = df(x_0,y_0) + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y, \quad \text{где} \quad \alpha,\beta \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0. \qquad (4)$$

Легко убедиться, что $(\alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y) = o(\rho)$ при $\rho \to 0$. А тогда из (4) заключаем, что полный дифференциал функции $u = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) отличается при $\rho \to 0$ от полного приращения функции в этой точке на величину бесконечно малую более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Этим, как и в случае функции одной переменной, широко пользуются в приближенных вычислениях, заменяя приращение функции ее дифференциалом (как более простым по структуре).

Рассмотрим, например, такую задачу. Имеется дифференцируемая функция $u = f(x,y)$. Требуется дать оценку погрешности, которая получится при вычислении значения этой функции, если значения x и y получены с некоторыми погрешностями, оценки которых нам известны. Более точно, это означает следующее.

Пусть Δx и Δy — фактические погрешности, с которыми получены значения x и y. Точные значения величин Δx и Δy нам не даны; известно лишь, что они удовлетворяют неравенствам

$$|\Delta x| \le \delta x, \quad |\Delta y| \le \delta y,$$

где δx и δy — максимальные абсолютные погрешности, т. е. наибольшие по абсолютной величине ошибки, которые мы можем допустить. Нужно получить максимальную абсолютную погрешность δu для величины u.

Фактической погрешностью, получающейся при вычислении значения функции $u = f(x,y)$, будет

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

При малых Δx и Δy величину Δu, т. е. приращение функции, можно заменить приближенно ее дифференциалом, т. е. положить

$$\Delta u = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y,$$

откуда $|\Delta u| \le |f'_x(x,y)| \cdot |\Delta x| + |f'_y(x,y)| \cdot |\Delta y|$, а следовательно, и подавно

$$|\Delta u| \le |f'_x(x,y)| \cdot \delta x + |f'_y(x,y)| \cdot \delta y. \tag{5}$$

Таким образом, фактическая ошибка (взятая по абсолютной величине) всегда меньше или равна величине, стоящей в правой части неравенства (5). Эту величину и принимают за δu, т. е. полагают

$$\delta u = |f'_x(x,y)| \cdot \delta x + |f'_y(x,y)| \cdot \delta y. \tag{6}$$

На формуле (6) основываются правила приближенных вычислений, как, например:

1) Максимальная относительная погрешность произведения равна сумме максимальных относительных погрешностей сомножителей.

2) Максимальная относительная погрешность частного равна сумме максимальных относительных погрешностей делимого и делителя.

▶ 1) В самом деле, пусть $u = xy$. По формуле (6) имеем $\delta u = |y| \cdot \delta x + |x| \cdot \delta y$, откуда, разделив на $|x \cdot y|$, получаем $\dfrac{\delta u}{|u|} = \dfrac{\delta x}{|x|} + \dfrac{\delta y}{|y|}$.

2) Пусть $u=\dfrac{x}{y}$. По формуле (6) имеем $\delta u=\left|\dfrac{1}{y}\right|\cdot\delta x+\left|-\dfrac{x}{y^2}\right|\cdot\delta y$, откуда, разделив на $\left|\dfrac{x}{y}\right|$, получаем $\dfrac{\delta u}{|u|}=\dfrac{\delta x}{|x|}+\dfrac{\delta y}{|y|}$. ◀

Замечание. Понятие полного дифференциала функции трех и большего числа переменных вводится совершенно аналогично рассмотренному случаю функции двух переменных. Именно:

Пусть функция $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ определена в параллелепипеде (P) ($(P)\subset\mathbf{R}^n$), содержащем точку $(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$. Пусть $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ дифференцируема в точке $(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$. Возьмем Δx_1, Δx_2, , Δx_n — любые, но такие, чтобы точка $(x_{10}+\Delta x_1,x_{20}+\Delta x_2,\dots,x_{n0}+\Delta x_n)\in(P)$. Выражение

$$f'_{x_1}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\Delta x_1+f'_{x_2}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\Delta x_2+$$
$$+\dots+f'_{x_n}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\Delta x_n \qquad (7)$$

называется *полным дифференциалом* функции $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в точке $(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$ и обозначается символом $df(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$ (или $du(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$).

Таким образом, по определению

$$df(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})=f'_{x_1}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\Delta x_1+$$
$$+f'_{x_2}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\Delta x_2+\dots+f'_{x_n}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\Delta x_n.$$

Если принять во внимание, что $\Delta x_1=dx_1$, $\Delta x_2=dx_2$, , $\Delta x_n=dx_n$, то можно писать

$$df(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})=f'_{x_1}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\,dx_1+$$
$$+f'_{x_2}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\,dx_2+\dots+f'_{x_n}(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\,dx_n, \qquad (8)$$

или

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Видим, что полный дифференциал функции от любого числа переменных равен сумме всех ее частных дифференциалов. Он линеен относительно приращений Δx_1, Δx_2, , Δx_n независимых переменных и отличается при $\rho \to 0$ от приращения функции Δu на величину бесконечно малую более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$. Справедливо все сказанное выше и в отношении использования дифференциалов в приближенных вычислениях.

§5. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы полного дифференциала

Пусть функция $u = f(x,y)$ определена в прямоугольнике (P_{xy}) и имеет там непрерывные частные производные $u'_x = f'_x(x,y)$, $u'_y = f'_y(x,y)$. Пусть функции $x = \varphi(\xi,\eta)$, $y = \psi(\xi,\eta)$ определены в прямоугольнике $(P_{\xi\eta})$ и имеют там непрерывные производные x'_ξ, x'_η, y'_ξ, y'_η. Пусть функции $\varphi(\xi,\eta)$, $\psi(\xi,\eta)$ еще и такие, что для любой точки (ξ,η) из $(P_{\xi\eta})$ оказывается, что точка $(\varphi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta)) \in (P_{xy})$. Таким образом, в $(P_{\xi\eta})$ имеет смысл суперпозиция $u = f(\varphi(\xi,\eta), \psi(\xi,\eta)) = F(\xi,\eta)$. При этих условиях:

1) функция $u = F(\xi,\eta)$ дифференцируема в каждой точке $(\xi,\eta) \in (P_{\xi\eta})$;

2) $$du = u'_x dx + u'_y dy, \tag{1}$$
т. е. соотношение (1) справедливо как в случае, когда x и y — независимые переменные, так и в случае, когда x и y есть функции новых переменных.

▶ 1) По условию, в каждой точке $(\xi,\eta) \in (P_{\xi\eta})$ функции $x = \varphi(\xi,\eta)$, $y = \psi(\xi,\eta)$ удовлетворяют условиям *s*. Значит, эти функции дифференцируемы в каждой точке $(\xi,\eta) \in (P_{\xi\eta})$ и, следовательно, у них существуют конечные частные производные $x'_\xi = \varphi'_\xi(\xi,\eta)$, $x'_\eta = \varphi'_\eta(\xi,\eta)$, $y'_\xi = \psi'_\xi(\xi,\eta)$, $y'_\eta = \psi'_\eta(\xi,\eta)$ в каждой точке $(\xi,\eta) \in (P_{\xi\eta})$. Отметим также, что функции $x = \varphi(\xi,\eta)$, $y = \psi(\xi,\eta)$ непрерывны в $(P_{\xi\eta})$.

В силу теоремы 2 (о производных сложной функции) заключаем, что в каждой точке $(\xi,\eta)\in(P_{\xi\eta})$ существуют $u'_\xi = F'_\xi(\xi,\eta)$ и $u'_\eta = F'_\eta(\xi,\eta)$, причем

$$\begin{aligned} u'_\xi &= u'_x\cdot x'_\xi + u'_y\cdot y'_\xi,\\ u'_\eta &= u'_x\cdot x'_\eta + u'_y\cdot y'_\eta. \end{aligned} \tag{2}$$

Имеем: $u'_x(x,y)=f'_x(\varphi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta))$, $u'_y(x,y)=f'_y(\varphi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta))$ — непрерывны в $(P_{\xi\eta})$ как суперпозиции непрерывных функций. По условию, x'_ξ, x'_η, y'_ξ, y'_η — непрерывны в $(P_{\xi\eta})$. А тогда из соотношений (2) для u'_ξ, u'_η следует, что u'_ξ, u'_η непрерывны в каждой точке $(\xi,\eta)\in(P_{\xi\eta})$ и, следовательно, функция $u=F(\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям s в каждой точке $(\xi,\eta)\in(P_{\xi\eta})$. Значит, функция $u=F(\xi,\eta)$ — дифференцируема в каждой точке $(\xi,\eta)\in(P_{\xi\eta})$. Таким образом, утверждение 1) доказано.

2) Имеем, по определению полного дифференциала,

$$du = u'_\xi d\xi + u'_\eta d\eta$$

(у нас ξ, η — независимые переменные). Но $u'_\xi = u'_x\cdot x'_\xi + u'_y\cdot y'_\xi$, $u'_\eta = u'_x\cdot x'_\eta + u'_y\cdot y'_\eta$ (см. (2)). Поэтому

$$\begin{aligned} du &= (u'_x\cdot x'_\xi + u'_y\cdot y'_\xi)\,d\xi + (u'_x\cdot x'_\eta + u'_y\cdot y'_\eta)\,d\eta =\\ &= u'_x(x'_\xi d\xi + x'_\eta d\eta) + u'_y(y'_\xi d\xi + y'_\eta d\eta). \end{aligned}$$

Но $x'_\xi d\xi + x'_\eta d\eta = dx$, $y'_\xi d\xi + y'_\eta d\eta = dy$. А тогда

$$du = u'_x dx + u'_y dy. \tag{3}$$

Следовательно, утверждение 2) также доказано. ◀

Заметим, что в соотношении (3) dx и dy — дифференциалы функций $x=\varphi(\xi,\eta)$, $y=\psi(\xi,\eta)$. Они не совпадают, вообще говоря, с приращениями Δx и Δy соответственно.

§6. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных

Пусть функция $u = f(x,y)$ определена в прямоугольнике (P) и имеет в каждой точке $(x,y) \in (P)$ конечную частную производную $u'_x = f'_x(x,y)$. Ясно, что $f'_x(x,y)$ представляет собой некоторую новую функцию, определенную в (P). Следовательно, можно поставить вопрос о нахождении частных производных по x и по y от этой новой функции.

Если существуют $\left(f'_x(x,y)\right)'_x$ и $\left(f'_x(x,y)\right)'_y$, то их обозначают $f''_{xx}(x,y)$ и $f''_{xy}(x,y)$ и называют *частными производными второго порядка* функции $f(x,y)$. ($f''_{xx}(x,y)$ — первое и второе дифференцирование по x; $f''_{xy}(x,y)$ — первое дифференцирование по x, второе — по y.) Используют и другие обозначения введенных частных производных второго порядка, а именно: $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, u''_{xx}, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, u''_{xy}, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ соответственно.

Предположим теперь, что функция $u = f(x,y)$ имеет в каждой точке $(x,y) \in (P)$ конечную частную производную $u'_y = f'_y(x,y)$. Ясно, что $f'_y(x,y)$ представляет собой еще одну новую функцию, определенную в (P).

Если существуют $\left(f'_y(x,y)\right)'_x$ и $\left(f'_y(x,y)\right)'_y$, то их обозначают $f''_{yx}(x,y)$ и $f''_{yy}(x,y)$ и называют *частными производными второго порядка* функции $f(x,y)$. ($f''_{yx}(x,y)$ — первое дифференцирование по y, второе — по x; $f''_{yy}(x,y)$ — первое и второе дифференцирование по y.) Используют и другие обозначения, а именно: $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, u''_{yx}, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, u''_{yy}, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ соответственно.

Замечание. Следует различать $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$.

Частные производные третьего, четвертого порядков и т. д., а также соответствующая символика вводятся совершенно аналогично:

$\dfrac{\partial^m u(x,y)}{\partial x^m}$ — функция дифференцируется m раз по x;

$\dfrac{\partial^m u(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}$, где $m = p + q$, — функция дифференцируется p раз по x, а затем q раз по y.

Вообще символ $\dfrac{\partial^m u(x,y)}{\partial x^{p_1} \partial y^{q_1} \partial x^{p_2} \ldots \partial y^{q_s}}$, где $m = p_1 + q_1 + p_2 + {} + \ldots + q_s$, означает, что функция $u(x,y)$ сначала дифференцируется p_1 раз по x, затем q_1 раз по y, p_2 раз по x и т. д.; наконец, q_s раз по y.

Частная производная второго, третьего и большего порядка, являющаяся результатом дифференцирования по разным переменным, называется *смешанной*. Смешанными будут, например, частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial x} \text{ и т. д.}$$

Теорема (о равенстве смешанных производных). Пусть функция $u = f(x,y)$ определена в прямоугольнике (P), содержащем точку (x_0, y_0). Пусть в каждой точке $(x,y) \in (P)$ существуют конечные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$. Тогда, если смешанные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), то

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{1}$$

▶ Выберем и закрепим числа h и k — любые, но такие, что точка $(x_0 + h, y_0 + k) \in (P)$. Ясно, что точки $(x_0 + h, y_0)$ и $(x_0, y_0 + k) \in (P)$. Введем в рассмотрение величину

$$A = f(x_0 + h, y_0 + k) - {} - f(x_0, y_0 + k) - {} - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0). \tag{2}$$

Подсчитаем величину A двумя способами.

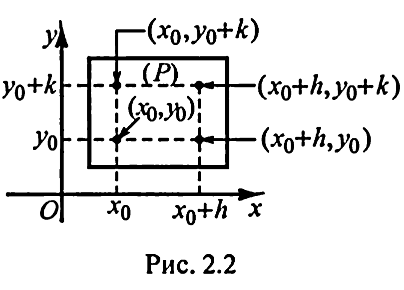


Рис. 2.2

Способ 1. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$. Имеем

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x_0 + h) &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)\\ \varphi(x_0) &= f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\end{aligned}\right. \Rightarrow \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = A\,. \quad (3)$$

По условию, в каждой точке $(x, y) \in (P)$ существует конечная $f'_x(x, y)$. Следовательно, для любого x из промежутка $[x_0, x_0 + h]$ существуют конечные $f'_x(x, y_0 + k)$ и $f'_x(x, y_0)$. Но тогда для любого x из промежутка $[x_0, x_0 + h]$ существует конечная производная $\varphi'(x)$, причем

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)\,. \quad (4)$$

Видим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому $A = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) \cdot h \Rightarrow$ в силу (4),

$$A = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \left[f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)\right] \cdot h \quad (5)$$

$$(0 < \theta_1 < 1)\,.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\lambda(y) = f'_x(x_0 + \theta_1 h, y)\,. \quad (6)$$

Имеем $\lambda(y_0 + k) = f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k)$, $\lambda(y_0) = f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lambda(y_0 + k) - \lambda(y_0) = f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)\,.$$

А тогда, в силу (5), получаем

$$A = \left[\lambda(y_0 + k) - \lambda(y_0)\right] \cdot h\,. \quad (7)$$

По условию, в каждой точке $(x, y) \in (P)$ существует конечная $f''_{xy}(x, y)$. Следовательно, для любого y из промежутка $[y_0, y_0 + k]$ существует конечная $f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y)$. Но тогда для любого y из промежутка $[y_0, y_0 + k]$ существует конечная производная $\lambda'(y)$, причем $\lambda'(y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y)$.

Видим, что функция $\lambda(y)$ в промежутке $[y_0, y_0 + k]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому

$$A = [\lambda(y_0+k) - \lambda(y_0)]h = \lambda'(y_0+\theta_2 k)\cdot kh \quad (0<\theta_2<1)$$

Таким образом, окончательно получаем для A:

$$A = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)\cdot kh\,. \tag{8}$$

Способ 2. Рассмотрим функцию $\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$. Имеем

$$\begin{aligned}\psi(y_0+k) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k),\\ \psi(y_0) &= f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)\end{aligned} \Rightarrow \psi(y_0+k) - \psi(y_0) = A\,. \tag{9}$$

По условию, в каждой точке $(x,y)\in(P)$ существует конечная $f'_y(x,y)$. Следовательно, для любого y из промежутка $[y_0, y_0+k]$ существуют конечные $f'_y(x_0+h, y)$ и $f'_y(x_0, y)$. Но тогда для любого y из промежутка $[y_0, y_0+k]$ существует конечная производная $\psi'(y)$, причем

$$\psi'(y) = f'_y(x_0+h, y) - f'_y(x_0, y)\,. \tag{10}$$

Видим, что функция $\psi(y)$ в промежутке $[y_0, y_0+k]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому $A = \psi(y_0+k) - \psi(y_0) =$ $= \psi'(y_0+\theta_3 k)\cdot k$, $(0<\theta_3<1)$, $\Rightarrow$ в силу (10),

$$A = \left[f'_y(x_0+h, y_0+\theta_3 k) - f'_y(x_0, y_0+\theta_3 k)\right]\cdot k\,. \tag{11}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\mu(x) = f'_y(x, y_0+\theta_3 k)\,. \tag{12}$$

Имеем $\mu(x_0+h) - \mu(x_0) = f'_y(x_0+h, y_0+\theta_3 k) - f'_y(x_0, y_0+\theta_3 k)$. А тогда, в силу (11), получаем

$$A = [\mu(x_0+h) - \mu(x_0)]\cdot k\,.$$

По условию, в каждой точке $(x,y)\in(P)$ существует конечная $f''_{yx}(x,y)$. Следовательно, для любого x из промежутка $[x_0, x_0+h]$ существует конечная $f''_{yx}(x, y_0+\theta_3 k)$. Но тогда для любого x из промежутка $[x_0, x_0+h]$ существует конечная производная $\mu'(x)$, причем $\mu'(x)=f''_{yx}(x,y_0+\theta_3 k)$. Видим, что функция $\mu(x)$ в промежутке $[x_0,x_0+h]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому

$$A=[\mu(x_0+h)-\mu(x_0)]\cdot k=\mu'(x_0+\theta_4 h)\cdot hk\ (0<\theta_4<1).$$

Таким образом, окончательно для A получаем

$$A=f''_{yx}(x_0+\theta_4 h,\, y_0+\theta_3 k)\cdot hk. \tag{13}$$

Сопоставляя теперь два выражения (8) и (13), полученные для A, находим

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k). \tag{14}$$

В соотношении (14) станем изменять h и k так, чтобы было $\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$. Тогда

$$(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)\xrightarrow[\rho\to 0]{}(x_0,y_0),$$

$$(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k)\xrightarrow[\rho\to 0]{}(x_0,y_0).$$

Так как $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ непрерывны в точке (x_0,y_0), то

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)\xrightarrow[\rho\to 0]{}f''_{xy}(x_0,y_0),$$
$$f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 k)\xrightarrow[\rho\to 0]{}f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Следовательно, переходя к пределу в соотношении (14) при $\rho\to 0$, получим $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$. ◀

Следствие 1. Если смешанные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ непрерывны в каждой точке $(x,y)\in P$, то $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ всюду в (P).

Следствие 2. Если функция $u=f(x,y)$ определена в (P) и имеет там непрерывные частные производные всех порядков до m включительно, то при вычислении смешанной производной любого порядка до m включительно от функции $f(x,y)$ (в каждой точке $(x,y)\in(P)$) безразлично, в каком порядке производить отдельные дифференцирования.

▶ Это вытекает из возможности (в силу только что доказанной теоремы) менять порядок любых двух последовательных дифференцирований по x и y. Повторное применение такой операции позволяет результат p дифференцирований по x и q дифференцирований по y, независимо от их порядка, свести к $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, где $p+q \le m$, т. е. сначала к p дифференцированиям по x, затем к q дифференцированиям по y. ◀

Замечание. Частные производные порядка выше первого для функций трех и большего числа переменных определяются совершенно аналогично рассмотренному случаю функции двух переменных.

Именно, пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в параллелепипеде (P) $((P) \subset \mathbf{R}^n)$. Символ $\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}$, где $p_1 + p_2 + \dots + p_n = m$, означает, что функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сначала дифференцируется p_1 раз по x_1, затем p_2 раз по x_2, и т. д., и, наконец, — p_n раз по x_n.

Отметим, далее, что теорема о равенстве смешанных производных и следствия из неё полностью переносятся на случай функции любого числа переменных. Так, например/

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в параллелепипеде (P) $((P) \subset \mathbf{R}^n)$ и имеет там непрерывные частные производные всех порядков до m включительно. Тогда при вычислении смешанной производной любого порядка до m включительно от функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (в каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (P)$) безразлично, в каком порядке производить отдельные дифференцирования.

Пример. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в (P) $((P) \subset \mathbf{R}^3)$ и имеет там непрерывные частные производные до порядка $m = 10$ включительно. Тогда будем иметь, например,

$$\frac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^2 \partial z^2 \partial y \partial z^2 \partial x^2} = \frac{\partial^{10} u}{\partial x^3 \partial y^3 \partial z^4}.$$

§7. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $u = f(x, y)$, где x и y являются независимыми переменными. Пусть эта функция определена в (P) ($(P) \subset \mathbf{R}^2$) и имеет там непрерывные частные производные всех порядков до m включительно. Тогда, если $m \geq 1$, то функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в каждой точке $(x, y) \in (P)$. Значит, в каждой точке $(x, y) \in (P)$ существует $df(x, y)$, причем

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy. \qquad (\tilde{1})$$

Здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения независимых переменных, т. е. произвольные числа, никак не зависящие от x и y. Закрепим dx и dy. Тогда $df(x, y)$ будет представлять собой функцию от двух переменных x и y, определенную в (P). Если $m \geq 2$, то $df(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in (P)$ есть дифференцируемая функция и, следовательно, существует дифференциал от этой новой функции, т. е. существует $d\big(df(x, y)\big)$. $d^2u = d\big(df(x, y)\big)$ называется *дифференциалом второго порядка* от функции $u = f(x, y)$ (при этом дифференциалы независимых переменных dx и dy считаем теми же самыми).

Итак, по определению, $d^2u = d(du)$. Отметим, что d^2u есть тоже функция от x и y, определенная в (P). Причем, если $m \geq 3$, то d^2u есть дифференцируемая функция в каждой точке $(x, y) \in (P)$. Совершенно аналогично предыдущему полагаем $d^3u = d(d^2u)$. Величина d^3u называется *дифференциалом третьего порядка* функции $u = f(x, y)$. И вообще, *дифференциал порядка* m функции $u = f(x, y)$ определяется равенством

$$d^m u = d(d^{m-1}u).$$

(Следует помнить, что дифференциалы независимых переменных dx и dy считаются постоянными при определении дифференциалов любого порядка до m включительно.)

Найдем явные выражения для введенных дифференциалов через частные производные и через дифференциалы независимых переменных. Так как у нас (по предположению) функция $u = f(x,y)$ имеет в (P) непрерывные частные производные всех порядков до m включительно, то величины смешанных частных производных, которые нам будут встречаться, не зависят от порядка дифференцирования.

Имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\,; \tag{1}$$

$$d^2u = d(du) = \frac{\partial}{\partial x}(du)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}(du)\cdot dy =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2 .$$

Так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, то будем иметь

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2\,; \tag{2}$$

$$d^3u = d(d^2u) = \frac{\partial}{\partial x}(d^2u)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}(d^2u)\cdot dy =$$

$$= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(dx)^3 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}(dx)^2dy +$$

$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}(dy)^2dx + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(dy)^3 .$$

Если $m \ge 3$, то $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$. Следовательно,

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(dy)^3 . \tag{3}$$

Отметим, что выражения для du, d^2u, d^3u в символической форме можно записать так:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\cdot u,$$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot u,$$

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot u.$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m\cdot u\,. \tag{4}$$

Правую часть (4) следует понимать так. После возведения в степень m выражения, стоящего в скобках, степени символов $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ с последующим их условным умножением на u следует рассматривать как указатели порядков соответствующих частных производных функции $u(x,y)$.

Замечание. В случае функции $u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ($n > 2$, $x_1,x_2,\dots,x_n$ — независимые переменные) понятие дифференциала второго, третьего, , m-го порядков вводится совершенно аналогично рассмотренному случаю функции двух переменных.

При этом имеет место символическая формула

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m\cdot u\,. \tag{5}$$

Формула (5) справедлива при условии, что функция $u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ определена в параллелепипеде (P) ($(P) \subset \mathbf{R}^n$) и имеет там непрерывные частные производные всех порядков до порядка m включительно.

§8. Дифференциалы высших порядков сложной функции нескольких переменных. Нарушение свойства инвариантности формы

Рассмотрим сложную функцию

$$u = f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,, \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_p); \end{aligned} \tag{2}$$

$t_1, t_2, \dots, t_p$ — независимые переменные. Предполагается, что функции (2) дифференцируемы достаточное число раз в параллелепипеде (T) $((T) \subset \mathbf{R}^p)$, а функция (1) дифференцируема достаточное число раз в параллелепипеде (P) $((P) \subset \mathbf{R}^n)$. По свойству инвариантности формы полного дифференциала первого порядка сложной функции имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \tag{3}$$

Но здесь

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}dt_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_p}dt_p, \\ dx_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}dt_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_p}dt_p, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dx_n &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}dt_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_p}dt_p. \end{aligned} \tag{4}$$

Поэтому при постоянных $dt_1, dt_2, \dots, dt_p$ величины $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ уже не будут постоянными, вообще говоря, ибо

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_p}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_p}, , \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_p}$$

могут зависеть от $t_1, t_2, \dots, t_p$.

Покажем, что формула (5) предыдущего параграфа для $m \ge 2$, вообще говоря, не сохраняется. В самом деле, имеем, например,

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2\right) + \ldots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2 +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d^2x_n =$$

$$= \underline{d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d^2x_n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2u = \underline{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^2\cdot u} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d^2x_n. \qquad (5)$$

Если бы x_1, x_2, ..., x_n были бы независимыми переменными, то мы имели бы

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n\right)^2\cdot u. \qquad (6)$$

Сопоставляя выражения (5) и (6) для d^2u, видим, что в случае, когда x_1, x_2, ..., x_n сами являются функциями других переменных, формула для d^2u усложнилась (добавилось выражение $\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot d^2x_n$). Еще большее усложнение получается для d^3u и т. д. Таким образом, свойство инвариантности формы для дифференциалов порядка выше первого теряется, вообще говоря.

Мы не зря здесь сказали “вообще говоря”. Дело в том, что имеется важный частный случай, когда и для сложной функции свойство инвариантности формы имеет место для дифференциалов любого порядка. Это будет тогда, когда $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются линейными функциями от $t_1, t_2, \dots, t_p$, т. е. когда

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1p}t_p + b_1, \\ x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2p}t_p + b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{np}t_p + b_n, \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}$; $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}$; ; $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{np}$; $b_1, b_2, \dots, b_n$ — постоянные числа. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} dx_1 &= a_{11}dt_1 + a_{12}dt_2 + \dots + a_{1p}dt_p = a_{11}\Delta t_1 + a_{12}\Delta t_2 + \dots + a_{1p}\Delta t_p, \\ dx_2 &= a_{21}dt_1 + a_{22}dt_2 + \dots + a_{2p}dt_p = a_{21}\Delta t_1 + a_{22}\Delta t_2 + \dots + a_{2p}\Delta t_p, \Rightarrow \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dx_n &= a_{n1}dt_1 + a_{n2}dt_2 + \dots + a_{np}dt_p = a_{n1}\Delta t_1 + a_{n2}\Delta t_2 + \dots + a_{np}\Delta t_p \end{aligned}$$

$\Rightarrow dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ — постоянные числа, так как $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_p$ — постоянные. Но тогда $d^2x_1 \equiv 0$, $d^2x_2 \equiv 0$, , $d^2x_n \equiv 0$ и, следовательно, будем иметь вместо (5)

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 \cdot u.$$

Видим, что в этом частном случае дифференциал второго порядка обладает свойством инвариантности формы.

Итак, в случае, когда промежуточные аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$ выражаются через независимые переменные $t_1, t_2, \dots, t_p$ линейно, $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ оказываются постоянными при постоянных $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_p$. Следовательно, с $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ можно поступать так же, как поступали ранее с дифференциалами независимых переменных. Поэтому формулы для дифференциалов порядка выше первого сложной функции u будут иметь тот же вид, как и в случае, когда $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются независимыми переменными.

Таким образом, в случае, когда промежуточные аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются линейными функциями от $t_1, t_2, \dots, t_p$, чтобы получить дифференциалы сложной функции u, можно сначала вычислить эти дифференциалы, считая $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимыми переменными, а затем вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ подставить их выражения через $t_1, t_2, \dots, t_p$.

§9. Примеры и задачи

Пример 1. Найти $f'_x(x,1)$, если $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Решение. Имеем

$$f'_x(x,1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, 1) - f(x,1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1.$$

Пример 2. Найти $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$, если $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $O(0,0)$?

Решение. Имеем

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Полное приращение Δf заданной функции в точке $O(0,0)$ будет таким:

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} - 0 = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y}.$$

Мы знаем, что функция $f(x,y)$ будет дифференцируемой в точке $O(0,0)$, если $\Delta f(0,0)$ представимо в виде

$$\Delta f(0,0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho),$$

где A и B — постоянные числа.

В нашем примере линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции отсутствует ($A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y \equiv 0$). Для дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ необходимо, чтобы было

$$\sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = o(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Положим $\varphi(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$. Возьмем последовательность точек $\{M_k(\Delta x_k, \Delta y_k)\}_{k \in \mathrm{N}} = \left\{M_k\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right)\right\}_{k \in \mathrm{N}}$. Ясно, что $M_k\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right) \xrightarrow[k \to \infty]{} O(0,0)$. Соответствующая последовательность значений функции

$$\{\varphi(M_k)\}_{k \in \mathrm{N}} = \left\{\frac{\sqrt[3]{1/k^2}}{\sqrt{2}/\sqrt{k^2}}\right\}_{k \in \mathrm{N}} = \left\{\frac{k^{1/3}}{\sqrt{2}}\right\} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty.$$

Это означает, что функция $\varphi(\Delta x, \Delta y)$ при $\rho \to 0$ не является бесконечно малой.

Вывод. Данная функция $f(x, y)$ не является дифференцируемой в точке $O(0,0)$.

Пример 3. Является ли дифференцируемой в точке $O(0,0)$ функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$?

Решение. Полное приращение Δf заданной функции в точке $O(0,0)$ будет таким:

$$\Delta f(0,0) = \sqrt[3]{(0 + \Delta x)^3 + (0 + \Delta y)^3} - 0 = \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}.$$

Представим $\Delta f(0,0)$ в виде: $\Delta f(0,0) = \Delta x + \Delta y + \left(\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y\right)$. Функция $f(x,y)$ будет дифференцируемой в точке $O(0,0)$, если $\Delta f(0,0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$, где A и B — постоянные числа, $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с ρ при $\rho \to 0$.

Положим

$$\varphi(\Delta x,\Delta y)=\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y\,.$$

Тогда $\Delta f(0,0)=\Delta x+\Delta y+\varphi(\Delta x,\Delta y)$ (здесь $A=1$, $B=1$). Для дифференцируемости функции $f(x,y)$ в точке $O(0,0)$ необходимо, чтобы было

$$\varphi(\Delta x,\Delta y)=o(\rho)\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{\rho\to 0}\frac{\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\,.$$

Пусть

$$\frac{\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{обозначение}}}{=}\psi(\Delta x,\Delta y).$$

Возьмем последовательность точек $\{M_k(\Delta x_k,\Delta y_k)\}_{k\in\mathrm{N}}=$ $=\left\{M_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}_{k\in\mathrm{N}}$. Ясно, что $M_k\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}O(0,0)$. Соответствующая последовательность значений функции

$$\{\psi(M_k)\}_{k\in\mathrm{N}}=\left\{\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{k^3}}-\frac{2}{k}}{\sqrt{\frac{2}{k^2}}}\right\}_{k\in\mathrm{N}}=\left\{\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\right\}_{k\in\mathrm{N}}$$

не является бесконечно малой при $k\to\infty$.

Вывод. Заданная функция $f(x,y)$ не является дифференцируемой в точке $O(0,0)$.

Пример 4. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0,0)$ функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{если}\quad x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{в точке}\quad O(0,0).\end{cases}$$

Решение. Полное приращение Δf заданной функции в точке $O(0,0)$ будет таким:

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} - 0 = e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Имеем

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{\rho} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\rho} = t \\ t\to+\infty, \text{ если } \rho\to+0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} te^{-t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{t^2}\cdot 2t} = 0.$$

Следовательно, $\Delta f(0,0)$ можно записать в виде

$$\Delta f(0,0) = 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + o(\rho) \quad (\text{здесь } A=0,\ B=0).$$

Вывод. Заданная функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$.

Пример 5. Пусть $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$. Найти u'_x, u'_y, u'_z.

Решение. $u'_x = \frac{1}{y^z}\cdot zx^{z-1} = \frac{z}{x}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $u'_y = (x^z\cdot y^{-z})'_y = x^z(-z)y^{-z-1} =$

$= -\frac{z}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^z$; $u'_z = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y}$.

Пример 6. Пусть $u = x^{\frac{y}{z}}$. Найти u'_x, u'_y, u'_z.

Решение. $u'_x = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1} = \frac{y}{z}\cdot\frac{u}{x}$; $u'_y = x^{\frac{y}{z}}\cdot\frac{1}{z}\ln x = \frac{u}{z}\ln x$;

$$u'_z = x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{uy}{z^2}\ln x.$$

Пример 7. $u = x^{y^z}$. Найти u'_x, u'_y, u'_z.

Решение. $u'_x = y^z\cdot x^{y^z-1} = \frac{y^z}{x}x^{y^z} = y^z\frac{u}{x}$; $u'_y = x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1} =$

$= zy^{z-1}u\ln x$;

$$u'_z = x^{y^z}\cdot\ln x\cdot y^z\ln y = uy^z\cdot\ln x\cdot\ln y.$$

Пример 8. Пусть $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & \text{в точке} \quad O(0,0). \end{cases}$ Показать, что $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{xy}(0,0)$.

Решение. В точках, где $x^2+y^2\neq 0$, имеем

$$f'_x=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right); \quad f'_y=x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

В точке $O(0,0)$ производные $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$ находим по определению:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\,0)-f(0,0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)\cdot 0\cdot\dfrac{(0+\Delta x)^2-0}{(0+\Delta x)^2+0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0\cdot(0+\Delta y)\cdot\dfrac{0-(0+\Delta y)^2}{0+(0+\Delta y)^2}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

Итак, получили:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases} y\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & \text{если} \quad x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & \text{в точке} \quad O(0,0); \end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} x\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & \text{если} \quad x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & \text{в точке} \quad O(0,0). \end{cases}$$

Имеем теперь:

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,0+\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y\,(\Delta y)^2}{\Delta y\,(\Delta y)^2}=-1;$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(0+\Delta x,0)-f'_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\,(\Delta x)^2}{\Delta x\,(\Delta x)^2}=1.$$

Видим, что $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

Пример 9. Существует ли $f''_{xy}(0,0)$, если

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{в точке } O(0,0)\end{cases}\quad ?$$

Решение. В точках, где $x^2+y^2>0$, имеем $f'_x(x,y)=$ $=2y\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. $f'_x(0,0)$ находим по определению:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(0+\Delta x)\cdot 0}{(0+\Delta x)^2+0}\cdot\frac{1}{\Delta x}=0\,.$$

Итак, получили

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}2y\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{при } x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{в точке } O(0,0).\end{cases}$$

Имеем теперь

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\,0+\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2(0+\Delta y)\cdot\dfrac{(0+\Delta y)^2}{(0+\Delta y)^4}-0}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}2\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^5}=\infty\,.$$

Видим, что конечного предела не существует. Следовательно, $f''_{xy}(0,0)$ не существует.

Пример 10. Найти $df(1,1,1)$ и $d^2f(1,1,1)$, если $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$.

Решение. Имеем $df(x,y,z)=f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz$. Но

$$f'_x=\frac{1}{z}\cdot x^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{y^{\frac{1}{z}}}=\frac{1}{xz}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}=\frac{f(x,y,z)}{xz};$$

$$f'_y = -\frac{1}{z}\cdot y^{-\frac{1}{z}-1}\cdot x^{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{yz}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z} = -\frac{f(x,y,z)}{yz};$$

$$f'_z = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\ln\frac{x}{y} = -\frac{f(x,y,z)}{z^2}\ln\frac{x}{y}.$$

Следовательно,

$$df(x,y,z) = \frac{f(x,y,z)}{z}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}\cdot dz\right) \quad\Rightarrow\quad df(1,1,1) = dx - dy.$$

Имеем, далее,

$$d^2f(x,y,z) = d(df(x,y,z)) = \frac{1}{z}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{1}{z}\cdot\ln\frac{x}{y}dz\right)\cdot df(x,y,z) -$$

$$-\frac{dz}{z^2}\cdot f(x,y,z)\cdot\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}dz\right) +$$

$$+\frac{f(x,y,z)}{z}\cdot\left(-\frac{(dx)^2}{x^2} + \frac{(dy)^2}{y^2} + \frac{(dz)^2}{z^2}\ln\frac{x}{y} - \frac{dz}{z}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad d^2f(1,1,1) = (dx-dy)^2 - dz\,(dx-dy) -$$

$$-(dx)^2 + (dy)^2 - dzdx + dzdy = 2\,(dy-dx)\,(dy+dz).$$

Пример 11. Предполагая, что x, y малы по абсолютной величине, вывести приближенные формулы для следующих выражений:

а) $(1+x)^m(1+y)^n$; б) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$; в) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$.

Решение. Замечаем, что каждая из данных трех функций:

$$u = f_1(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n, \qquad u = f_2(x,y) = \ln(1+x)\cdot\ln(1+y),$$

$$u = f_3(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$$

удовлетворяет условиям “s” в точке $M_0(0,0)$. Поэтому для каждой из этих трех функций справедлива формула для полного приращения:

$$\Delta u = u(x,y) - u(0,0) = u'_x\cdot x + u'_y\cdot y + o(\rho),$$

где $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с ρ при $\rho\to 0$. (Здесь $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.) Отбрасывая величину $o(\rho)$ и перенеся $u(0,0)$ в правую часть, получаем приближенное равенство:

$$u(x,y) \approx u(0,0) + u'_x(0,0)\cdot x + u'_y(0,0)\cdot y\,.$$

Для заданных функций будем иметь:

а) $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny$.

б) Используя формулу для приращения функции одной переменной

$$\Delta u(x) = u'\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x\,, \quad \text{где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0\,,$$

находим следующие приближенные равенства:

$$\ln(1+x) \approx x, \quad \ln(1+y) \approx y\,.$$

Следовательно, $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y) \approx x\cdot y$.

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1+xy} \approx x + y$.

Пример 12. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить приближенно $\dfrac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98\cdot\sqrt[4]{1.05^3}}}$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию $u = f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{y\sqrt[4]{z^3}}}$. Найдем $df(1,1,1)$, положив $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.02$, $\Delta z = 0.05$. Имеем

$$f'_x(1,1,1) = \left.\frac{2x}{\sqrt[3]{y\sqrt[4]{z^3}}}\right|_{(\bullet)\ (1,1,1)} = 2\,;$$

$$f'_y(1,1,1) = -\frac{1}{3}y^{-4/3}x^2z^{-1/4}\Big|_{(\bullet)\ (1,1,1)} = -\frac{1}{3}\,;$$

$$f'_z(1,1,1) = -\frac{1}{4}z^{-5/4}x^2y^{-1/3}\Big|_{(\bullet)\ (1,1,1)} = -\frac{1}{4}\,.$$

Следовательно, $df(1,1,1) = 2\cdot 0.03 + \dfrac{1}{3}\cdot 0.02 - \dfrac{1}{4}\cdot 0.05 \approx 0.054$. А тогда

$$f(1.03, 0.98, 1.05) \approx f(1,1,1) + df(1,1,1) \approx 1 + 0.054 = 1.054\,.$$

Пример 13. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить приближенно $0.97^{1.05}$.

Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(x,y)=x^y$. Имеем $f(1,1)=1$. Положим $\Delta x=-0.03$, $\Delta y=0.05$.

$$0.97^{1.05}=f(0.97;1.05)\approx f(1,1)+df(1,1).$$

Найдем $df(1,1)$ при $\Delta x=-0.03$, $\Delta y=0.05$. Имеем

$$f'_x(x,y)=y\cdot x^{y-1}\quad\Rightarrow\quad f'_x(1,1)=1;\quad f'_y(x,y)=x^y\cdot\ln x\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad f'_y(1,1)=0.$$

Поэтому $df(1,1)=-0.03$. Следовательно,

$$0.97^{1.05}\approx 1-0.03\quad\Rightarrow\quad 0.97^{1.05}\approx 0.97.$$

Пример 14. Пусть $\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$, $\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$ $+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Найти $\Delta_1 u$ и $\Delta_2 u$, если $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Решение. Положим $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$. Имеем

$$\Delta_1 u=\left[\frac{\partial(1/r)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(1/r)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial(1/r)}{\partial z}\right]^2=$$

$$=\left(-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2.$$

Но $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$. Поэтому

$$\Delta_1 u=\frac{1}{r^4}\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)=\frac{1}{r^4};$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Но

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(1/r)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(1/r)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial^2(1/r)}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(1/r)}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

Следовательно, $\Delta_2 u=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0$.

Пример 15. Пусть $u=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$. Найти частные производные первого и второго порядков.

Решение. Положим $x=\xi$, $\frac{x}{y}=\eta$. Получим $u=f(\xi,\eta)$. Имеем

$$u'_x=f'_\xi(\xi,\eta)\cdot\xi'_x+f'_\eta(\xi,\eta)\cdot\eta'_x=f'_\xi(\xi,\eta)\cdot 1+f'_\eta(\xi,\eta)\cdot\frac{1}{y};$$

$$u'_y=f'_\xi(\xi,\eta)\cdot\xi'_y+f'_\eta(\xi,\eta)\cdot\eta'_y=f'_\xi(\xi,\eta)\cdot 0+f'_\eta(\xi,\eta)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

$$u''_{xx}=(u'_x)'_x=\left(f'_\xi(\xi,\eta)+\frac{1}{y}f'_\eta(\xi,\eta)\right)'_x=$$

$$=f''_{\xi\xi}(\xi,\eta)+f''_{\xi\eta}(\xi,\eta)\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{y}f''_{\eta\xi}(\xi,\eta)+\frac{1}{y^2}f''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Предполагая, что $f''_{\xi\eta}(\xi,\eta)$ и $f''_{\eta\xi}(\xi,\eta)$ непрерывны, а значит, равны, получаем

$$u''_{xx}=f''_{\xi\xi}(\xi,\eta)+\frac{2}{y}f''_{\xi\eta}(\xi,\eta)+\frac{1}{y^2}f''_{\eta\eta}(\xi,\eta);$$

$$u''_{xy}=(u'_x)'_y=\left(f'_\xi(\xi,\eta)+\frac{1}{y}f'_\eta(\xi,\eta)\right)'_y=f''_{\xi\eta}(\xi,\eta)\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\frac{1}{y^2}f'_\eta(\xi,\eta)+$$

$$+\frac{1}{y} f''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} f''_{\xi\eta}(\xi,\eta) - \frac{1}{y^2} f'_{\eta}(\xi,\eta) - \frac{x}{y^3} f''_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

$$u''_{yy} = (u'_y)'_y = \left(-\frac{x}{y^2}\cdot f'_{\eta}(\xi,\eta)\right)'_y =$$

$$= \frac{2x}{y^3}\cdot f'_{\eta}(\xi,\eta) - \frac{x}{y^2} f''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{2x}{y^3}\cdot f'_{\eta}(\xi,\eta) + \frac{x^2}{y^4} f''_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

Пример 16. Найти $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

Решение. Положим $x + y + z = \xi$, $x^2 + y^2 + z^2 = \eta$. Получим $u = f(\xi,\eta)$. Имеем

$$u'_x = u'_{\xi}(\xi,\eta)\cdot\xi'_x + u'_{\eta}(\xi,\eta)\cdot\eta'_x = u'_{\xi}(\xi,\eta) + 2x\cdot u'_{\eta}(\xi,\eta),$$

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x = \left(u'_{\xi}(\xi,\eta) + 2xu'_{\eta}(\xi,\eta)\right)'_x =$$

$$= u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) + u''_{\xi\eta}(\xi,\eta)\cdot 2x + 2u'_{\eta}(\xi,\eta) + 2xu''_{\eta\xi}(\xi,\eta) + 2xu''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\cdot 2x =$$

$$= u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 4xu''_{\xi\eta}(\xi,\eta) + 2u'_{\eta}(\xi,\eta) + 4x^2u''_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

Совершенно аналогично находятся u''_{yy} и u''_{zz}.

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 4yu''_{\xi\eta}(\xi,\eta) + 2u'_{\eta}(\xi,\eta) + 4y^2u''_{\eta\eta}(\xi,\eta),$$

$$u''_{zz} = u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 4zu''_{\xi\eta}(\xi,\eta) + 2u'_{\eta}(\xi,\eta) + 4z^2u''_{\eta\eta}(\xi,\eta).$$

Таким образом, получаем

$$\Delta u = 3u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 4(x + y + z)\,u''_{\xi\eta}(\xi,\eta) +$$

$$+ 4(x^2 + y^2 + z^2)\,u''_{\eta\eta}(\xi,\eta) + 6u'_{\eta}(\xi,\eta),$$

или

$$\Delta u = 3u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 4\xi\,u''_{\xi\eta}(\xi,\eta) + 4\eta\,u''_{\eta\eta}(\xi,\eta) + 6u'_{\eta}(\xi,\eta).$$

Пример 17. Пусть $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$. Найти du и d^2u.

Решение. Положим $\frac{x}{y} = \xi$, $\frac{y}{z} = \eta$. Получим $u = f(\xi,\eta)$ (ξ,η — промежуточные аргументы; x, y, z — независимые переменные). Имеем $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$, где

$$u'_x = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x = u'_\xi(\xi,\eta) \cdot \frac{1}{y};$$

$$u'_y = u'_\xi(\xi,\eta) \cdot \xi'_y + u'_\eta(\xi,\eta) \cdot \eta'_y = u'_\xi(\xi,\eta) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + u'_\eta(\xi,\eta) \cdot \frac{1}{z};$$

$$u'_z = u'_\xi \cdot \xi'_z + u'_\eta \cdot \eta'_z = -u'_\eta(\xi,\eta) \cdot \frac{y}{z^2}.$$

Следовательно,

$$du = \frac{1}{y} \cdot u'_\xi(\xi,\eta)\, dx + \left(u'_\eta(\xi,\eta) \cdot \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} u'_\xi(\xi,\eta)\right) dy - u'_\eta(\xi,\eta) \frac{y}{z^2} dz =$$

$$= u'_\xi(\xi,\eta) \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + u'_\eta(\xi,\eta) \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2};$$

$$d^2u = d(du) = (du)'_x dx + (du)'_y dy + (du)'_z dz.$$

Имеем $(du)'_x = u''_{\xi\xi}(\xi,\eta) \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} - u'_\xi(\xi,\eta) \cdot \frac{dy}{y^2} + u''_{\eta\xi} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$;

$$(du)'_y = \left[u''_{\xi\xi}(\xi,\eta)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + u''_{\xi\eta}(\xi,\eta)\frac{1}{z}\right] \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + u'_\xi(\xi,\eta)\left(-\frac{dx}{y^2} + \frac{2x}{y^3} dy\right) +$$

$$+ \left[u''_{\eta\xi}(\xi,\eta)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\frac{1}{z}\right] \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2} - u'_\eta(\xi,\eta)\frac{dz}{z^2};$$

$$(du)'_z = \left[u''_{\xi\eta}(\xi,\eta)\left(-\frac{y}{z^2}\right)\right] \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\left(-\frac{y}{z^2}\right) \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2} -$$

$$-u'_\eta(\xi,\eta)\frac{dy}{z^2}+u'_\eta(\xi,\eta)\frac{2y}{z^3}dz.$$

Следовательно, $d^2u = u''_{\xi\xi}(\xi,\eta)\left[\frac{(y\,dx - x\,dy)}{y^3}dx - \frac{x\,(y\,dx - x\,dy)}{y^4}dy\right]+$

$$+u''_{\xi\eta}(\xi,\eta)\cdot\left[\frac{(z\,dy - y\,dz)}{yz^2}dx + \frac{(y\,dx - x\,dy)}{y^2z}dy -\right.$$

$$\left.-\frac{x(z\,dy - y\,dz)}{y^2z^2}dy - \frac{y(y\,dx - x\,dy)}{y^2z^2}dz\right]+$$

$$+u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\cdot\left[\frac{(z\,dy - y\,dz)}{z^3}dy - \frac{y\,(z\,dy - y\,dz)}{z^4}dz\right]-$$

$$-u'_\xi(\xi,\eta)\cdot\left[\frac{dxdy}{y^2}+\frac{dxdy}{y^2}-\frac{2x}{y^3}(dy)^2\right]-$$

$$-u'_\eta(\xi,\eta)\left[\frac{dzdy}{z^2}+\frac{dydz}{z^2}-\frac{2y}{z^3}(dz)^2\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2u = u''_{\xi\xi}(\xi,\eta)\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{y^4} + u''_{\eta\eta}(\xi,\eta)\frac{(z\,dy - y\,dz)^2}{z^4}+$$

$$+2u''_{\xi\eta}(\xi,\eta)\frac{(y\,dx - x\,dy)(z\,dy - y\,dz)}{y^2z^2}-$$

$$-2u'_\xi(\xi,\eta)\frac{y\,dx - x\,dy}{y^3}dy - 2u'_\eta(\xi,\eta)\frac{z\,dy - y\,dz}{z^3}dz.$$

Пример 18. Найти $d^n u$, если $u = f(ax + by + cz)$.

Решение. Положим $\xi = ax + by + cz$ (ξ — промежуточный аргумент, $x, y; z$ — независимые переменные). Видим, что промежуточный аргумент выражается через независимые переменные линейно. В этом случае, как мы знаем, дифференциал любого порядка функции $u = f(\xi)$ обладает свойством инвариантности формы, т. е. записывается в том же виде, как если бы ξ была независимой переменной. Итак, имеем $d^n u = f^{(n)}_{\xi^{(n)}}(\xi)\cdot(d\xi)^n$, где $d\xi = a\,dx + b\,dy + c\,dz$, откуда $d^n u = f^{(n)}_{\xi^{(n)}}(\xi)\cdot(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^n$.

Пример 19. Найти $d^n u$, если $u = f(\xi,\eta,\zeta)$, где $\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z$, $\eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z$, $\zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z$.

Решение. Здесь ξ, η, ζ — промежуточные аргументы; x, y, z — независимые переменные. Видим, что промежуточные аргументы выражаются через независимые переменные линейно. Следовательно, $d^n u(\xi,\eta,\zeta)$ обладает свойством инвариантности формы, т. е. выражается через промежуточные аргументы ξ, η, ζ так же, как если бы ξ, η, ζ были независимыми переменными.

Итак, имеем

$$d^n u(\xi,\eta,\zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}d\zeta\right)^n \cdot f(\xi,\eta,\zeta),$$

где $d\xi = a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz$, $d\eta = a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz$, $d\zeta = a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz$. Таким образом, получаем

$$d^n u(\xi,\eta,\zeta) = \left[(a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz)\frac{\partial}{\partial\xi} + (a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz)\frac{\partial}{\partial\eta} + \right.$$

$$\left. + (a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]^n \cdot f(\xi,\eta,\zeta) = \left[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi} + a_2\frac{\partial}{\partial\eta} + a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + \right.$$

$$\left. + dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial}{\partial\eta} + b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi} + c_2\frac{\partial}{\partial\eta} + c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\eta,\zeta).$$

Пример 20. Доказать, что если функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, то функция $v = u\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

▶ *Решение.* Положим $\xi = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\eta = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Тогда $v = u(\xi, \eta)$. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right). \quad (*)$$

Имеем, далее,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3},\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

Но тогда соотношение (*) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

ибо $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$. ◀

Пример 21. Упростить выражение $\sec x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z=\sin y+f(\sin x-\sin y),$$

где f — дифференцируемая функция.

Решение. Положим $\xi=\sin x-\sin y$. Тогда $z=\sin y+f(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_\xi(\xi)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}=f'_\xi(\xi)\cdot\cos x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+f'_\xi(\xi)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}=\cos y-f'_\xi(\xi)\cdot\cos y.$$

А тогда

$$\sec x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos x}\cdot f'_\xi(\xi)\cos x+\frac{1}{\cos y}\cdot\cos y\left(1-f'_\xi(\xi)\right)=1.$$

Пример 22. Показать, что функция $z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$.

Решение. Положим $\xi=\frac{y}{x^2}$. Тогда $z=x^n f(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}f(\xi)+x^n f'_\xi(\xi)\left(-\frac{2y}{x^3}\right);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^n f'_\xi(\xi)\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nx^n f(\xi)-\frac{2y}{x^2}x^n f'_\xi(\xi)+\frac{2y}{x^2}x^n f'_\xi(\xi)=nx^n f(\xi)=nz.$$

Пример 23. Показать, что функция $z=y\cdot f(x^2-y^2)$, где f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$$

Решение. Положим $\xi=x^2-y^2$. Тогда $z=y\cdot f(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot f'_\xi(\xi)\cdot 2x,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f(\xi)+y\cdot f'_\xi(\xi)\cdot(-2y).$$

Следовательно,

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xy^3 f'_\xi(\xi)+xyf(\xi)-2xy^3 f'_\xi(\xi)=xyf(\xi)=xz.$$

Пример 24. Упростить выражение $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$, если

$$u=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x,z-x).$$

Решение. Положим $\xi=y-x$, $\eta=z-x$. Тогда

$$u=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(\xi,\eta).$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}(y+z)+xyz-f'_\xi(\xi,\eta)-f'_\eta(\xi,\eta);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2z}{2}+f'_\xi(\xi,\eta);\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2y}{2}+f'_\eta(\xi,\eta);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$$

Пример 25. Пусть $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$ и $f(x,y,z) = F(u,v,w)$. Доказать, что $xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$.

Решение. По условию, $x = (vw)^{1/2}$, $y = (uw)^{1/2}$, $z = (uv)^{1/2}$; $F(u,v,w) = f\left((vw)^{1/2},(uw)^{1/2},(uv)^{1/2}\right)$. Имеем

$$F'_u = f'_x \cdot 0 + f'_y \cdot \frac{w}{2(uw)^{1/2}} + f'_z \cdot \frac{v}{2(uv)^{1/2}};$$

$$F'_v = f'_x \cdot \frac{w}{2(vw)^{1/2}} + f'_y \cdot 0 + f'_z \cdot \frac{u}{2(uv)^{1/2}};$$

$$F'_w = f'_x \cdot \frac{v}{2(vw)^{1/2}} + f'_y \cdot \frac{u}{2(uw)^{1/2}} + f'_z \cdot 0 .$$

Умножая первое из этих равенств на u, второе на v, третье на w и складывая получаемые результаты, находим

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = f'_y \frac{(uw)^{1/2}}{2} + f'_z \frac{(uv)^{1/2}}{2} + f'_x \frac{(vw)^{1/2}}{2} + f'_z \frac{(uv)^{1/2}}{2} +$$

$$+ f'_x \frac{(vw)^{1/2}}{2} + f'_y \frac{(uw)^{1/2}}{2} = f'_x \cdot (vw)^{1/2} + f'_y \cdot (uw)^{1/2} + f'_z \cdot (uv)^{1/2} =$$

$$= xf'_x + yf'_y + zf'_z .$$

Пример 26. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируемая, проверить равенство $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, если $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

Решение. Положим $\xi = xy$. Тогда $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \varphi'_\xi(\xi) \cdot y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x} + \varphi'_\xi(\xi) \cdot x .$$

Следовательно,

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = -\frac{1}{3} y^2 + x^2 y \varphi'_\xi(\xi) - \frac{2}{3} y^2 - x^2 y \varphi'_\xi(\xi) + y^2 = 0 .$$

Пример 27. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируемая, проверить равенство $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\beta z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu$, если $u=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha},\dfrac{z}{x^\beta}\right)$.

Решение. Положим $\xi=\dfrac{y}{x^\alpha}$, $\eta=\dfrac{z}{x^\beta}$. Тогда $u=x^n\varphi(\xi,\eta)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=nx^{n-1}\varphi(\xi,\eta)+x^n\left[\varphi'_\xi(\xi,\eta)\left(-\alpha\cdot\frac{y}{x^{\alpha+1}}\right)+\varphi'_\eta(\xi,\eta)\left(-\beta\cdot\frac{z}{x^{\beta+1}}\right)\right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^n\varphi'_\xi(\xi,\eta)\frac{1}{x^\alpha};\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=x^n\varphi'_\eta(\xi,\eta)\frac{1}{x^\beta}.$$

Следовательно,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nx^n\varphi(\xi,\eta)-\alpha yx^{n-\alpha}\varphi'_\xi(\xi,\eta)-\beta zx^{n-\beta}\varphi'_\eta(\xi,\eta)+$$

$$+\alpha yx^{n-\alpha}\varphi'_\xi(\xi,\eta)+\beta zx^{n-\beta}\varphi'_\eta(\xi,\eta)=nx^n\varphi(\xi,\eta)=nu.$$

Пример 28. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дважды дифференцируемы, проверить равенство $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$.

Решение. Положим $\xi=x-at$, $\eta=x+at$. Тогда $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi'_\xi(\xi)(-a)+\psi'_\eta(\eta)a;\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varphi''_{\xi^2}(\xi)a^2+\psi''_{\eta^2}(\eta)a^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'_\xi(\xi)+\psi'_\eta(\eta);\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''_{\xi^2}(\xi)+\psi''_{\eta^2}(\eta).$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left[\varphi''_{\xi^2}(\xi)+\psi''_{\eta^2}(\eta)\right]$ и $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\left[\varphi''_{\xi^2}(\xi)+\psi''_{\eta^2}(\eta)\right]$. Видим, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Пример 29. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ — дважды дифференцируемы, проверить равенство $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, если $u=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Решение. Положим $\xi=\dfrac{y}{x}$. Тогда $u=\varphi(\xi)+x\psi(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'_\xi(\xi)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\psi(\xi)+x\psi'_\xi(\xi)\left(-\frac{y}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'_\xi(\xi)\frac{1}{x}+x\psi'_\xi(\xi)\frac{1}{x}=\varphi'_\xi(\xi)\frac{1}{x}+\psi'_\xi(\xi);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x^4}+2\frac{y}{x^3}\varphi'_\xi(\xi)+\psi'_\xi(\xi)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x^3}+\psi'_\xi(\xi)\frac{y}{x^2}=$$

$$=\varphi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x^4}+2\frac{y}{x^3}\varphi'_\xi(\xi)+\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''_{\xi^2}(\xi)\left(-\frac{y}{x^3}\right)-\varphi'_\xi(\xi)\frac{1}{x^2}+\psi'_\xi(\xi)\frac{1}{x}-\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\psi'_\xi(\xi)=$$

$$=\varphi''_{\xi^2}(\xi)\left(-\frac{y}{x^3}\right)-\varphi'_\xi(\xi)\frac{1}{x^2}-\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''_{\xi^2}(\xi)\frac{1}{x^2}+\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}\varphi'_\xi(\xi)+\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x}-$$

$$-2\varphi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x^2}-2\varphi'_\xi(\xi)\frac{y}{x}-2\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x}+\varphi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x^2}+\psi''_{\xi^2}(\xi)\frac{y^2}{x}=0.$$

Пример 30. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ — дважды дифференцируемы, проверить равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u=\varphi[x+\psi(y)]$.

Решение. Положим $\xi = x + \psi(y)$. Тогда $u = \varphi(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_{\xi}(\xi); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'_{\xi}(\xi)\cdot\psi'_{y}(y);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''_{\xi^2}(\xi); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \varphi''_{\xi^2}(\xi)\cdot\psi'_{y}(y).$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \varphi''_{\xi^2}(\xi)\cdot\varphi'_{\xi}(\xi)\cdot\psi'_{y}(y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \varphi''_{\xi^2}(\xi)\cdot\varphi'_{\xi}(\xi)\cdot\psi'_{y}(y) \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Пример 31. Путем последовательного дифференцирования исключить произвольную функцию φ из соотношения $z = x + \varphi(xy)$.

Решение. Положим $\xi = xy$. Тогда $z = x + \varphi(\xi)$. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \varphi'_{\xi}(\xi)\cdot y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'_{\xi}(\xi)\cdot x$. Умножив первое из этих двух соотношений на x, а второе — на $(-y)$, а затем сложив полученные результаты, находим:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

Пример 32. Путем последовательного дифференцирования исключить произвольную функцию φ из соотношения $z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Решение. Положим $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда $z = \varphi(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'_{\xi}(\xi)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'_{\xi}(\xi)\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'_{\xi}(\xi)\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad x\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'_{\xi}(\xi)\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Следовательно, $y\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow\; y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Пример 33. Путем последовательного дифференцирования исключить произвольную функцию φ из соотношения $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$.

Решение. Положим $\xi=\frac{x}{y}$, $\eta=\frac{y}{z}$. Тогда $u=\varphi(\xi,\eta)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'_\xi(\xi,\eta)\frac{1}{y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'_\xi(\xi,\eta)\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi'_\eta(\xi,\eta)\frac{1}{z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi'_\eta(\xi,\eta)\left(-\frac{y}{z^2}\right),$$

откуда

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{y}\varphi'_\xi(\xi,\eta);\quad y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y}\varphi'_\xi(\xi,\eta)+\frac{y}{z}\varphi'_\eta(\xi,\eta);\quad z\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z}\varphi'_\eta(\xi,\eta).$$

Следовательно,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Пример 34. Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ из соотношения $z=\varphi(x)\cdot\psi(y)$.

Решение. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'_x(x)\cdot\psi(y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(x)\cdot\psi'_y(y)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'_x(x)\cdot\psi'_y(y)\quad\Rightarrow\quad z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'_x(x)\cdot\psi'_y(y)\cdot\varphi(x)\cdot\psi(y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'_x(x)\cdot\psi'_y(y)\cdot\varphi(x)\cdot\psi(y).$$

Следовательно, $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пример 35. Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ из соотношения $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Решение. Положим $\frac{x}{y} = \xi$. Тогда $z = x\varphi(\xi) + y\psi(\xi)$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(\xi) + \varphi'_\xi(\xi)\frac{x}{y} + y\,\psi'_\xi(\xi)\frac{1}{y} = \varphi(\xi) + \frac{x}{y}\varphi'_\xi(\xi) + \psi'_\xi(\xi);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\,\varphi'_\xi(\xi)\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \psi(\xi) + y\,\psi'_\xi(\xi)\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \psi(\xi) - \frac{x}{y}\psi'_\xi(\xi) - \frac{x^2}{y^2}\varphi'_\xi(\xi);$$

откуда

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = x\varphi(\xi) + \frac{x^2}{y}\varphi'_\xi(\xi) + x\,\psi'_\xi(\xi); \qquad y\frac{\partial z}{\partial y} = y\,\psi(\xi) - \frac{x^2}{y}\varphi'_\xi(\xi) - x\,\psi'_\xi(\xi).$$

Следовательно,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi(\xi) + y\,\psi(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Глава 3

ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ

В математике и ее приложениях часто приходится иметь дело со следующими случаями:

1) Переменная y, являющаяся по смыслу задачи функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяется соотношением вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0. \tag{1}$$

2) Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$, являющиеся по смыслу задачи функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяются системой вида

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

При этом возникают следующие вопросы:

1) При каких условиях уравнение (1) однозначно разрешимо относительно переменной y (т. е. при каких условиях уравнение (1) определяет y как функцию аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$) и при каких условиях эта функция будет непрерывной, дифференцируемой и т. д.?

2) При каких условиях система уравнений (2) однозначно разрешима относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (т. е. определяет $y_1, y_2, \ldots, y_m$ как функции аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$) и при каких условиях эти функции будут непрерывными, дифференцируемыми и т. д.?

§1. Теоремы существования неявных функций

Теорема 1 (об однозначной разрешимости уравнения вида $F(x,y)=0$). Пусть:

1) Функция $F(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$(\overline{P})=\begin{cases} x_0-A\le x\le x_0+A, \\ y_0-B\le y\le y_0+B \end{cases}$$

и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$;

2) $F(x_0,y_0)=0$;

3) $F'_y(x_0,y_0)\ne 0$.

Тогда существуют числа a и b ($0<a\le A$, $0<b\le B$), такие, что:

α) Каждому x из промежутка $[x_0-a,x_0+a]$ отвечает одно и только одно значение y из промежутка $[y_0-b,y_0+b]$ так, что $F(x,y)=0$ (т. е. $y=f(x)$, $x\in[x_0-a,x_0+a]$, причем $F(x,f(x))\equiv 0,\ x\in[x_0-a,x_0+a]$);

β) $f(x_0)=y_0$;

γ) $f(x)\in C([x_0-a,x_0+a])$ (т. е. $f(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0-a,x_0+a]$);

δ) В каждой точке промежутка $[x_0-a,x_0+a]$ существует производная $f'(x)$, причем $f'(x)\in C([x_0-a,x_0+a])$.

▶ По условию $F'_y(x_0,y_0)\ne 0$. Пусть, для определенности, $F'_y(x_0,y_0)>0$. У нас $F'_y(x,y)$ — непрерывна в $(\overline{P})\Rightarrow$ $F'_y(x,y)$ — непрерывна в точке (x_0,y_0). Следовательно, по теореме о стабильности знака, существуют числа A' и b ($0<A'\le A$, $0<b\le B$) такие, что будет: $F'_y(x,y)>0$ в прямоугольнике

$$(\overline{P}')=\begin{cases} x_0-A'\le x\le x_0+A', \\ y_0-b\le y\le y_0+b. \end{cases}$$

Отметим, что в случае надобности число b можно уменьшить. Тогда размеры прямоугольника $(\overline{P}')$ уменьшатся, но свойство, что в этом прямоугольнике $F'_y(x,y)>0$, сохранится.

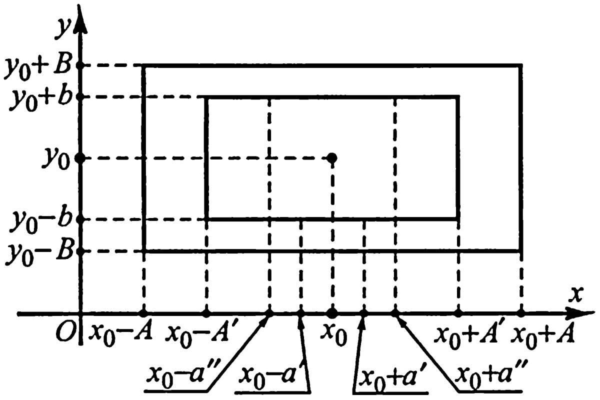


Рис. 3.1

Возьмем любое x из промежутка $[x_0 - A', x_0 + A']$ и закрепим. Обозначим его через $\bar{x}$. Рассмотрим функцию $F(\bar{x}, y)$. Это есть функция одного аргумента y, определенная и непрерывная в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$. Так как $F'_y(x, y) > 0$ в каждой точке прямоугольника $(\overline{P}')$, то, в частности, $F'_y(\bar{x}, y) > 0$ для любого y из промежутка $[y_0 - b, y_0 + b]$. Из этого следует, что функция $F(\bar{x}, y)$ строго возрастает в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$. В частности, это так при $\bar{x} = x_0$. Значит, функция $F(x_0, y)$ — строго возрастающая в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$. Но при $y = y_0$ значение этой функции равно нулю (ибо, по условию, $F(x_0, y_0) = 0$). Следовательно, $F(x_0, y_0 - b) < 0$, а $F(x_0, y_0 + b) > 0$.

Рассмотрим функцию $F(x, y_0 - b)$, $x \in [x_0 - A', x_0 + A']$. Это есть функция одного переменного x. Она определена и непрерывна в промежутке $[x_0 - A', x_0 + A']$. В частности, она непрерывна при $x = x_0$. Так как $F(x_0, y_0 - b) < 0$, то по теореме о стабильности знака существует число a' $(0 < a' \le A')$, такое, что $F(x, y_0 - b) < 0$ для любого x из промежутка $[x_0 - a', x_0 + a']$. (Отметим, что число a' зависит от выбора числа b.)

Рассмотрим теперь функцию $F(x, y_0 + b)$, $x \in [x_0 - A', x_0 + A']$. Она, как функция одного аргумента x, определена и непрерывна в промежутке $[x_0 - A', x_0 + A']$. В частности, непрерывна при $x = x_0$. Так как $F(x_0, y_0 + b) > 0$, то, по теореме о стабильности знака, существует число a'' $(0 < a'' \le A')$ такое, что $F(x, y_0 + b) > 0$ для любого x из промежутка $[x_0 - a'', x_0 + a'']$. (Отметим, что число a'' зависит от выбора числа b.)

Положим $a = \min\{a', a''\}$. (Ясно, что a зависит от b). Тогда для каждого x из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$ будем иметь одновременно: $F(x, y_0 - b) < 0$, $F(x, y_0 + b) > 0$. Покажем теперь, что найденные числа a и b — требуемые.

α) Возьмем любое x в промежутке $[x_0 - a, x_0 + a]$ и закрепим. Обозначим его через $\tilde{x}$. Рассмотрим функцию $F(\tilde{x}, y)$, $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Это есть функция одной переменной y, определенная и непрерывная в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$ и такая, что $F(\tilde{x}, y_0 - b) < 0$; $F(\tilde{x}, y_0 + b) > 0$. Но тогда, по теореме Коши, в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$ обязательно найдется хотя бы одна точка $\tilde{y}$ такая, что $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. В силу строгой монотонности функции $F(\tilde{x}, y)$ такая точка $\tilde{y}$ в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$ будет единственной.

Итак, взяв любое x из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$, мы показали, что ему в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$ отвечает одно и только одно значение y такое, что $F(x, y) = 0$.

Следовательно, $y = f(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, причем $F(x, f(x)) \equiv 0$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Таким образом, пункт α) доказан.

β) Если в качестве $\tilde{x}$ взять точку x_0, то придем к выводу, что в промежутке $[y_0 - b, y_0 + b]$ имеется одно и только одно значение $\tilde{y}$ такое, что $F(x_0, \tilde{y}) = 0$. Но у нас, по условию, $F(x_0, y_0) = 0$. Значит, тем единственным $\tilde{y}$ в $[y_0 - b, y_0 + b]$ будет как раз y_0. Таким образом, получили $f(x_0) = y_0$ и, следовательно, доказан пункт β).

γ) Убедимся, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0 - a, x_0 + a]$. Возьмем любое x из $[x_0 - a, x_0 + a]$ и закрепим. Обозначим его через x_*. Пусть x — любое другое из $[x_0 - a, x_0 + a]$. Ясно, что $f(x_*) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ и $f(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. А тогда $|x - x_*| \le 2a$ и $|f(x) - f(x_*)| \le 2b$.

Мы отмечали, что число b можно произвольным образом уменьшать; значит, можно взять $b > 0$ и любым сколь угодно малым. Было отмечено также, что число a зависит от выбора b. Получили, таким образом: любому $\varepsilon = 2b > 0$ отвечает $\delta = 2a > 0$, такое, что как только $|x - x_*| \le \delta$, так сейчас же $|f(x) - f(x_*)| \le \varepsilon$. А это означает, что $f(x)$ непрерывна в точке x_*. Так как точка x_* — любая из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$, то $f(x) \in C([x_0 - a, x_0 + a])$. Следовательно, пункт γ) доказан.

δ) Докажем пункт δ). Берем любое x из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$ и закрепляем его. Дадим этому x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \ne 0$ и точка $x + \Delta x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Тогда

$$f(x) = y \in [y_0 - b, y_0 + b], \qquad f(x + \Delta x) = y + \Delta y \in [y_0 - b, y_0 + b],$$

причем $F(x, y) = 0$ и $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ и, следовательно,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Если к левой части полученного равенства применить формулу для полного приращения функции, то это равенство примет вид:

$$F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0. \quad (1)$$

У нас $f(x) \in C([x_0 - a, x_0 + a])$. А тогда $\Delta y \to 0$, если $\Delta x \to 0$. Значит, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, если $\Delta x \to 0$, и, следовательно, $\alpha, \beta \to 0$, если $\Delta x \to 0$.

Из соотношения (1) находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta}.$$

Отсюда видно, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$. Значит, существует $y' = f'(x)$, причем

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}. \qquad (2)$$

Заметим, что $F'_x(x,f(x))$ и $F'_y(x,f(x))$ — непрерывны в промежутке $[x_0 - a, x_0 + a]$ как суперпозиции непрерывных функций и что $F'_y(x,f(x)) \neq 0$ для $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. А тогда из (2) следует, что $f'(x)$ непрерывна в $[x_0 - a, x_0 + a]$ как отношение двух непрерывных функций со знаменателем, не обращающимся в нуль. Пункт δ), следовательно, доказан. ◀

Замечание. Если к условиям теоремы 1 добавить требование существования и непрерывности частных производных второго порядка $F''_{xx}(x,y)$, $F''_{xy}(x,y)$, $F''_{yy}(x,y)$, то можно гарантировать существование и непрерывность $f''(x)$ в промежутке $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Действительно, у правой части равенства (2) в промежутке $[x_0 - a, x_0 + a]$ существует производная, вычисляемая по формуле

$$-\frac{1}{\left[F'_y(x,f(x))\right]^2}\Big\{\left[F''_{xx}(x,f(x)) + F''_{xy}(x,f(x))f'(x)\right]\cdot\left[F'_y(x,f(x))\right] -$$

$$-\left[F'_x(x,f(x))\right]\cdot\left[F''_{yx}(x,f(x)) + F''_{yy}(x,f(x))f'(x)\right]\Big\}.$$

Эта формула дает выражение для $f''(x)$ и одновременно показывает непрерывность $f''(x)$ в $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Аналогично показывается, что существование в $(\overline{P})$ у функции $F(x,y)$ непрерывных частных производных третьего порядка обеспечивает существование и непрерывность в $[x_0 - a, x_0 + a]$ $f'''(x)$ и т. д.

Теорема 1' (об однозначной разрешимости уравнения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$).

Пусть: 1) Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ определена и непрерывна в параллелепипеде

$$(\overline{P}) = \begin{cases} x_{10} - A_1 \le x_1 \le x_{10} + A_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n0} - A_n \le x_n \le x_{n0} + A_n, \\ y_0 - B \le y \le y_0 + B \end{cases}$$

и имеет там непрерывные частные производные F'_{x_1}, F'_{x_2}, ..., F'_{x_n}, F'_y;

2) $F(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_0) = 0$;

3) $F'_y(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_0) \ne 0$.

Тогда существуют числа a_1, a_2, ..., a_n, b ($0 < a_1 \le A_1$, $0 < a_2 \le A_2$, , $0 < a_n \le A_n$, $0 < b \le B$), такие, что:

α) Каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из параллелепипеда

$$(\overline{\Delta}) = \begin{cases} x_{10} - a_1 \le x_1 \le x_{10} + a_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n0} - a_n \le x_n \le x_{n0} + a_n \end{cases}$$

отвечает одно и только одно значение y из промежутка $[y_0 - b, y_0 + b]$ так, что $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ (т. е. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, причем

$$F\big(x_1, x_2, \dots, x_n; f(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) \equiv 0$$

в параллелепипеде $(\overline{\Delta})$).

β) $f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = y_0$.

γ) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C\big((\overline{\Delta})\big)$.

δ) В каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\overline{\Delta})$ существуют непрерывные f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_n}, причем

$$f'_{x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}, \quad f'_{x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \quad \dots, \quad f'_{x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_y}.$$

(Принимаем без доказательства; оно аналогично доказательству теоремы 1.)

Теорема 2 (об однозначной разрешимости системы $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$**).**

Пусть: 1) Функции $F(x,y,z)$ и $G(x,y,z)$ определены и непрерывны в параллелепипеде

$$(\overline{P}) = \begin{cases} x_0 - A \le x \le x_0 + A, \\ y_0 - B \le y \le y_0 + B, \\ z_0 - C \le z \le z_0 + C \end{cases}$$

и имеют там непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F'_z, G'_x, G'_y, G'_z;

2) $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ и $G(x_0,y_0,z_0) = 0$;

3) $J(x_0,y_0,z_0) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{(\bullet)\,(x_0,y_0,z_0)} \ne 0$.

Тогда существуют числа a, b, c ($0 < a \le A$, $0 < b \le B$, $0 < c \le C$) такие, что:

α) Каждому x из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$ отвечает одна и только одна точка (y,z) из прямоугольника $\begin{cases} y_0 - b \le y \le y_0 + b, \\ z_0 - c \le z \le z_0 + c, \end{cases}$ такая, что $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (т. е. $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, причем

$$\begin{cases} F(x,\varphi(x),\psi(x)) \equiv 0, \\ G(x,\varphi(x),\psi(x)) \equiv 0, \end{cases} \quad x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

β) $\varphi(x_0) = y_0$, $\psi(x_0) = z_0$.

γ) $\varphi(x) \in C([x_0 - a, x_0 + a])$, $\psi(x) \in C([x_0 - a, x_0 + a])$.

δ) В каждой точке $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ существуют непрерывные $\varphi'(x)$; $\psi'(x)$.

▶ По условию $J(x_0,y_0,z_0) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{(\bullet)\,(x_0,y_0,z_0)} \ne 0$. Но тогда в точке (x_0,y_0,z_0) отлична от нуля хотя бы одна из частных производных F'_z, G'_z. Пусть, для определенности, $G'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Тогда выполнены условия:

1′) Функция $G(x,y,z)$ определена и непрерывна в $(\overline{P}) = \begin{cases} x_0 - A \le x \le x_0 + A, \\ y_0 - B \le y \le y_0 + B, \\ z_0 - C \le z \le z_0 + C \end{cases}$ и имеет в $(\overline{P})$ непрерывные G'_x, G'_y, G'_z;

2′) $G(x_0,y_0,z_0) = 0$;

3′) $G'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Видим, что выполнены условия теоремы 1′ об однозначной разрешимости уравнения $G(x,y,z) = 0$. Поэтому существуют числа A', B', c ($0 < A' \le A$, $0 < B' \le B$, $0 < c \le C$), такие, что:

α′) Каждой точке (x,y) из прямоугольника $(\overline{\Delta}) = \begin{cases} x_0 - A' \le x \le x_0 + A', \\ y_0 - B' \le y \le y_0 + B' \end{cases}$ отвечает одно и только одно значение z из $[z_0 - c, z_0 + c]$, такое, что $G(x,y,z) = 0$ (т. е. $z = \theta(x,y)$ в $(\overline{\Delta})$, причем $G(x,y,\theta(x,y)) \equiv 0$ в $(\overline{\Delta})$);

β′) $\theta(x_0,y_0) = z_0$;

γ′) $\theta(x,y) \in C((\overline{\Delta}))$;

δ′) В каждой точке $(x,y) \in (\overline{\Delta})$ существуют непрерывные θ'_x, θ'_y, причем $\theta'_x(x,y) = -\dfrac{G'_x}{G'_z}$, $\theta'_y(x,y) = -\dfrac{G'_y}{G'_z}$.

Пусть точка $(x,y) \in (\overline{\Delta})$. Тогда $\theta(x,y) \in [z_0 - c, z_0 + c]$. Значит, и подавно точка $(x,y,\theta(x,y)) \in (\overline{P})$, и потому в $(\overline{\Delta})$ имеет смысл суперпозиция $F(x,y,\theta(x,y))$. Положим $H(x,y) = F(x,y,\theta(x,y))$. Отметим, что $H(x,y)$ — непрерывная функция в $(\overline{\Delta})$, как суперпозиция непрерывных функций, и что у нее в $(\overline{\Delta})$ существуют непрерывные частные производные H'_x и H'_y, вычисляемые по формулам:

$$H'_x = F'_x + F'_z \cdot \theta'_x = F'_x - F'_z \cdot \frac{G'_x}{G'_z}, \quad H'_y = F'_y + F'_z \cdot \theta'_y = F'_y - F'_z \cdot \frac{G'_y}{G'_z}.$$

Заметим, что $H'_y = \dfrac{F'_y \cdot G'_z - F'_z \cdot G'_y}{G'_z} = \dfrac{J}{G'_z}$. В частности,

$$H'_y(x_0, y_0) = \frac{J(x_0, y_0, z_0)}{G'_z(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

Таким образом, выполнены условия:

1″) Функция $H(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$(\overline{\Delta}) = \begin{cases} x_0 - A' \le x \le x_0 + A', \\ y_0 - B' \le y \le y_0 + B' \end{cases}$$

и имеет там непрерывные H'_x и H'_y;

2″) $H(x_0, y_0) = 0$ (ибо $H(x_0, y_0) = F(x_0, y_0, \theta(x_0, y_0)) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$);

3″) $H'_y(x_0 y_0) \neq 0$.

Видим, что функция $H(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому найдутся числа a и b ($0 < a \le A'$, $0 < b \le B'$), такие, что:

α″) Каждому x из $[x_0 - a, x_0 + a]$ отвечает одно и только одно значение y из $[y_0 - b, y_0 + b]$, такое, что $H(x, y) = 0$ (т. е. $y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, причем $H(x, \varphi(x)) \equiv 0$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$);

β″) $\varphi(x_0) = y_0$;

γ″) $\varphi(x) \in C([x_0 - a, x_0 + a])$;

δ″) В каждой точке промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$ существует непрерывная производная $\varphi'(x)$.

Покажем, что числа a, b и c — требуемые.

α) Пусть $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Тогда по α″) существует $y = \varphi(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, такое, что $H(x, y) = 0$, т. е. $F(x, \varphi(x), \theta(x, \varphi(x))) = 0$, причем $\theta(x, \varphi(x)) \in [z_0 - c, z_0 + c]$. Положим $\theta(x,\varphi(x))=\psi(x)$, и пусть $z=\psi(x)$. Тогда $F(x,y,z)=0$. Кроме того, $G(x,y,z)=G(x,y,\theta(x,y))=0$ (по α')). Итак, точка (x,y,z) такова, что $F(x,y,z)=0$, $G(x,y,z)=0$.

Таким образом, мы убедились, что любому x из промежутка $[x_0-a, x_0+a]$ в прямоугольнике $\begin{cases} y_0-b\le y\le y_0+b, \\ z_0-c\le z\le z_0+c \end{cases}$ отвечает

точка (y,z), удовлетворяющая системе $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

Покажем, что эта точка единственная. Допустим, что при $\bar{x}\in[x_0-a, x_0+a]$ нашлась точка $(\bar{y},\bar{z})\in\begin{cases} y_0-b\le y\le y_0+b, \\ z_0-c\le z\le z_0+c, \end{cases}$ для которой $\begin{cases} F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0, \\ G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0. \end{cases}$ Так как точка $(\bar{x},\bar{y})\in\begin{cases} x_0-a\le x\le x_0+a, \\ y_0-b\le y\le y_0+b, \end{cases}$ а $\begin{cases} x_0-a\le x\le x_0+a, \\ y_0-b\le y\le y_0+b \end{cases}\subset(\overline{\Delta})$, то $\theta(\bar{x},\bar{y})$ есть то единственное z

из $[z_0-c, z_0+c]$, для которого $G(\bar{x},\bar{y},z)=0$. Поэтому $\bar{z}=\theta(\bar{x},\bar{y})$ и потому $F(\bar{x},\bar{y},\theta(\bar{x},\bar{y}))=0$, т. е. $H(\bar{x},\bar{y})=0$. Отсюда ясно, что $\bar{y}=\varphi(\bar{x})$ (это то единственное значение y из $[y_0-b, y_0+b]$, для которого $H(\bar{x},y)=0$). А тогда $\bar{z}=\theta(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=\psi(\bar{x})$. Таким образом, пункт α) доказан полностью.

β) По условию, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ и $G(x_0,y_0,z_0)=0$. Так как точка $(\varphi(x_0),\psi(x_0))$ есть та единственная точка (y,z) из $\begin{cases} y_0-b\le y\le y_0+b, \\ z_0-c\le z\le z_0+c, \end{cases}$ для которой $\begin{cases} F(x_0,y,z)=0, \\ G(x_0,y,z)=0, \end{cases}$ то $y_0=\varphi(x_0)$, $z_0=\psi(x_0)$. Следовательно, пункт β) доказан.

γ) $\varphi(x)\in C([x_0-a, x_0+a])$ по γ''); $\psi(x)\in C([x_0-a, x_0+a])$ как суперпозиция непрерывных функций ($\psi(x)=\theta(x,\varphi(x))$).

δ) Утверждение δ) теоремы верно потому, что $\varphi'(x)$ существует и непрерывна в промежутке $[x_0-a, x_0+a]$ по δ''), а существование и непрерывность $\psi'(x)$ в промежутке $[x_0 - a, x_0 + a]$ следует из формулы $\psi(x) = \theta(x, \varphi(x))$ и существования непрерывных θ'_x, θ'_y и $\varphi'(x)$ ($\psi'(x) = \theta'_x(x,\varphi(x)) + \theta'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$).

Теорема 2 доказана полностью. ◀

Теорема 2' (об однозначной разрешимости системы

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Пусть:

1) Функции $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$, , $F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ определены и непрерывны в параллелепипеде

$$(\bar{P}) = \begin{cases} x_{10} - A_1 \le x_1 \le x_{10} + A_1, \\ \dots \dots \dots \dots \\ x_{n0} - A_n \le x_n \le x_{n0} + A_n, \\ y_{10} - B_1 \le y_1 \le y_{10} + B_1, \\ \dots \dots \dots \dots \\ y_{m0} - B_m \le y_m \le y_{m0} + B_m \end{cases}$$

и имеют там непрерывные частные производные $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_k}$ ($i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$), $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$);

2) $$\begin{matrix} F_1(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_m(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}) = 0; \end{matrix}$$

3) $$J(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}) =$$

$$= \left. \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \right|_{\substack{(\bullet)(x_{10}, \dots, x_{n0}, \\ y_{10}, \dots, y_{m0})}} \ne 0.$$

Тогда существуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ ($0 < a_1 \le A_1$, , $0 < a_n \le A_n$, $0 < b_1 \le B_1$, , $0 < b_m \le B_m$), такие, что:

α) Каждой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из параллелепипеда

$$(\overline{\Delta}) = \begin{cases} x_{10} - a_1 \le x_1 \le x_{10} + a_1, \\ x_{20} - a_2 \le x_2 \le x_{20} + a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n0} - a_n \le x_n \le x_{n0} + a_n \end{cases}$$

отвечает одна и только одна точка $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ из параллелепипеда

$$\begin{cases} y_{10} - b_1 \le y_1 \le y_{10} + b_1, \\ y_{20} - b_2 \le y_2 \le y_{20} + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m0} - b_m \le y_m \le y_{m0} + b_m, \end{cases}$$

такая, что

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right. \quad \text{в } (\overline{\Delta});$$

β)
$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = y_{10}, \\ &\varphi_2(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = y_{20}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_m(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = y_{m0}. \end{aligned}$$

γ) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \in C(\overline{\Delta})$.

δ) В каждой точке $(\overline{\Delta})$ существуют непрерывные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ ($i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$).

(Принимаем без доказательства; в случае, когда $m = 2$, $n = 1$, теорема доказана (см. теорему 2).)

Замечание. Теоремы 1, 1′, 2, 2′ имеют локальный характер. Их выводы справедливы, вообще говоря, лишь применительно к некоторой окрестности рассматриваемой точки; при выходе за пределы такой окрестности соответствующая неявная функция может перестать быть однозначной.

§2. Зависимость и независимость функций

Определение. Пусть в открытом параллелепипеде (P) $((P) \subset \mathbf{R}^n)$ заданы m функций от n аргументов:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Говорят, что функции (1) *зависимы* в (P), если хотя бы одна из них является функцией от остальных, т. е. равенство

$$f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_{\mu-1}, f_{\mu+1}, \dots, f_m) \tag{2}$$

является тождеством в (P), причем Φ — некоторая функция от $(m-1)$ переменных.

Замечание. Точный смысл (2) таков:

Назовем систему чисел $(y_i, y_j, \dots, y_r)$ *осуществимой* в (P), если в (P) имеется хоть одна точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, такая, что:

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= y_i, \\ f_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= y_j, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= y_r. \end{aligned}$$

Саму точку $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ будем называть *осуществляющей*. Равенство (2) означает, что для любой осуществимой системы чисел $(y_1, y_2, \dots, y_{\mu-1}, y_{\mu+1}, \dots, y_m)$ функция $f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не меняется при изменении осуществляющей точки.

Пример 1. Пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ f_2 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ f_3 &= x_4 + x_5. \end{aligned}$$

Ясно, что $f_1 = f_2 + f_3$.

Пример 2. Пусть

$$f_1 = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 + \sin x_4,$$
$$f_2 = \sin x_1 + \sin x_2,$$
$$f_3 = \sin x_3 + \sin x_4.$$

Ясно, что $f_1 = f_2 + f_3$.

Впредь мы будем предполагать, что функции f_1, f_2, ..., f_m, а также функция $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

Теорема 1. Если функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ зависимы в (P), то ранг *матрицы Якоби*

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

в каждой точке (P) ниже m (ранг матрицы J может меняться от точки к точке).

▶ Допустим, что функции f_1, f_2, ..., f_m зависимые в (P). Пусть, например, $f_m = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_{m-1})$. Тогда

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_k} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Отсюда видно, что m-я строка матрицы J есть линейная комбинация предыдущих строк (с коэффициентами $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}$, ..., $\frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}$).

Если $n < m$, то из матрицы J вообще нельзя составить ни одного определителя порядка m. Если же $n \geq m$, то в любом определителе порядка m, построенном из матрицы J, участвуют все строки, и ввиду их линейной зависимости каждый определитель порядка m будет равен нулю.

Итак, ранг матрицы J в обоих случаях меньше m. ◀

Следствие. Если хоть в одной точке (P) ранг матрицы J равен m, то функции f_1, f_2, ..., f_m независимы в (P).

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — зависимые в (P). Но тогда ранг матрицы J в каждой точке (P) ниже m, а это не так. Значит, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — независимые в (P). ◀

Теорема 2. Пусть наибольшее значение, которое принимает ранг матрицы J в параллелепипеде (P) есть μ, причем это значение μ достигается в точке $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Тогда:

1) Из функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ будет μ независимых (это именно те функции, которые участвуют в составлении определителя, отличного от нуля в точке $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

2) Если $m > \mu$, то точку $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ можно заключить в такой меньший параллелепипед (Q) $((Q) \subset (P))$, в котором остальные функции выражаются через указанные μ независимых.

▶ 1) Допустим, что в точке $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ отличен от нуля определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix}.$$

Тогда по теореме 1, функции $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ будут независимыми в (P) и, следовательно, пункт 1) теоремы доказан.

2) Пусть $m > \mu$. Займемся построением параллелепипеда (Q).

Допустим сначала, что $n = \mu$. Положим

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\mu) &= \bar{y}_1, \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\mu) &= \bar{y}_2, \\ &\ldots\ldots \\ f_\mu(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\mu) &= \bar{y}_\mu \end{aligned}$$

и рассмотрим функции $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ от 2μ аргументов

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) - y_1, \\ F_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) - y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ F_\mu &= f_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_\mu) - y_\mu. \end{aligned}$$

У этих функций аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ меняются в (P), а $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ — произвольны.

Рассмотрим точку $N(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\mu, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_\mu)$. В этой точке будет $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, , $F_\mu = 0$. Определитель же

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial F_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix}$$

есть Δ и в точке N он не равен нулю. А тогда по теореме $2'$ о неявных функциях систему уравнений $\begin{cases} F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \\ \cdots \\ F_\mu = 0 \end{cases}$ можно разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. Точнее: найдутся числа $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, , $a_\mu > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $\cdots$, $b_\mu > 0$, такие, что каждой точке $(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)$ из параллелепипеда:

$$\begin{cases} \bar{y}_1 - b_1 \le y_1 \le \bar{y}_1 + b_1, \\ \bar{y}_2 - b_2 \le y_2 \le \bar{y}_2 + b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \bar{y}_\mu - b_\mu \le y_\mu \le \bar{y}_\mu + b_\mu \end{cases}$$

отвечает в параллелепипеде

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - a_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + a_1, \\ \bar{x}_2 - a_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + a_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \bar{x}_\mu - a_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + a_\mu \end{cases}$$

одна и только одна точка $(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$, такая, что:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_\mu) = y_1,$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_\mu) = y_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\mu) = y_\mu.$$

По непрерывности функций f_1, f_2, ..., f_μ найдутся такие числа $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, , $\alpha_\mu > 0$, что как только точка $(x_1, x_2, \dots, x_\mu)$ принадлежит параллелепипеду:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - \alpha_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + \alpha_1, \\ \bar{x}_2 - \alpha_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + \alpha_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{x}_\mu - \alpha_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + \alpha_\mu, \end{cases}$$

так сейчас же точка $(f_1, f_2, \dots, f_\mu)$ принадлежит параллелепипеду:

$$\begin{cases} \bar{y}_1 - b_1 \le y_1 \le \bar{y}_1 + b_1, \\ \bar{y}_2 - b_2 \le y_2 \le \bar{y}_2 + b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{y}_\mu - b_\mu \le y_\mu \le \bar{y}_\mu + b_\mu. \end{cases}$$

Положим $\gamma_i = \min\{a_i, \alpha_i\}$ $(i = \overline{1,\mu})$. Тогда параллелепипед

$$(Q) = \begin{cases} \bar{x}_1 - \gamma_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + \gamma_1, \\ \bar{x}_2 - \gamma_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + \gamma_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{x}_\mu - \gamma_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + \gamma_\mu \end{cases}$$

— требуемый.

Действительно, пусть $(y_1, y_2, \dots, y_\mu)$ есть система, осуществимая в (Q). Это значит, что в (Q) найдется хоть одна точка $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_\mu^*)$, такая, что

$$f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_\mu^*) = y_1,$$
$$f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_\mu^*) = y_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_\mu(x_1^*, x_2^*, \dots, x_\mu^*) = y_\mu.$$

Так как $\gamma_i \le \alpha_i$ $(i = \overline{1,\mu})$, то параллелепипед (Q) содержится в параллелепипеде

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - \alpha_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + \alpha_1, \\ \bar{x}_2 - \alpha_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + \alpha_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_\mu - \alpha_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + \alpha_\mu \end{cases}$$

и точка $\left(f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_\mu^*), f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_\mu^*), \dots, f_\mu(x_1^*, x_2^*, \dots, x_\mu^*)\right)$ принадлежит параллелепипеду

$$\begin{cases} \bar{y}_1 - b_1 \le y_1 \le \bar{y}_1 + b_1, \\ \bar{y}_2 - b_2 \le y_2 \le \bar{y}_2 + b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{y}_\mu - b_\mu \le y_\mu \le \bar{y}_\mu + b_\mu, \end{cases}$$

или, что то же самое, этому параллелепипеду принадлежит точка $(y_1, y_2, \dots, y_\mu)$. Тогда, по сказанному выше, в параллелепипеде

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - a_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + a_1, \\ \bar{x}_2 - a_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + a_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{x}_\mu - a_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + a_\mu \end{cases}$$

есть единственная точка $(x_1, x_2, \dots, x_\mu)$, в которой $f_i(x_1, x_2, \dots, x_\mu) = y_i$ $(i = \overline{1,\mu})$. Тем более эта точка единственная в (Q). Иначе говоря, каждая осуществимая в (Q) система $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ осуществляется в одной-единственной точке. Поэтому закрепление $(y_1, y_2, \dots, y_\mu)$ вызывает закрепление в (Q) $(x_1, x_2, \dots, x_\mu)$, а тем самым и закрепление функций $f_{\mu+1}, \dots, f_m$.

Рассмотрим теперь случай $n > \mu$.

Определитель Δ в точке $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ отличен от нуля. По непрерывности точку M можно заключить в открытый параллелепипед (P_0) $((P_0) \subset (P))$, во всех точках которого будет $\Delta \ne 0$. Впредь мы станем рассматривать только точки (P_0). Положим, как и выше,

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n) &= \bar{y}_1, \\ f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n) &= \bar{y}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ f_\mu(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n) &= \bar{y}_\mu \end{aligned}$$

и рассмотрим функции

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)-y_1, \\ F_2 &= f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)-y_2, \\ &\dots\dots\dots \\ F_\mu &= f_\mu(x_1,x_2,\dots,x_n)-y_\mu. \end{aligned}$$

У этих функций аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$ меняются в (P_0), а $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ — произвольны.

Рассмотрим точку $N(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n,\bar{y}_1,\bar{y}_2,\dots,\bar{y}_\mu)$. В этой точке будет $F_1=0$, $F_2=0$, , $F_\mu=0$. Определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_\mu} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_\mu}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_\mu}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix}$$

есть Δ и в точке N он не равен нулю. А тогда по теореме 2′ о неявных функциях систему уравнений $\begin{cases} F_1=0, \\ F_2=0, \\ \dots \\ F_\mu=0 \end{cases}$ можно разрешить относительно $x_1, x_2, \dots, x_\mu$. Точнее: найдутся числа $a_1>0$, $a_2>0$, ..., $a_\mu>0$, $a_{\mu+1}>0$, ..., $a_n>0$, $b_1>0$, $b_2>0$, ..., $b_\mu>0$, такие, что каждой точке $(x_{\mu+1},\dots,x_n,y_1,\dots,y_\mu)$ из параллелепипеда

$$\begin{cases} \bar{x}_{\mu+1} - a_{\mu+1} \le x_{\mu+1} \le \bar{x}_{\mu+1} + a_{\mu+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{x}_n - a_n \le x_n \le \bar{x}_n + a_n, \\ \bar{y}_1 - b_1 \le y_1 \le \bar{y}_1 + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{y}_\mu - b_\mu \le y_\mu \le \bar{y}_\mu + b_\mu \end{cases}$$

отвечает в параллелепипеде

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - a_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + a_1, \\ \bar{x}_2 - a_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{x}_\mu - a_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + a_\mu \end{cases}$$

одна и только одна точка $(x_1, x_2, \dots, x_\mu)$, для которой

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_\mu. \end{gathered}$$

По непрерывности функций f_1, f_2, ..., f_μ найдутся такие числа $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, , $\alpha_n > 0$, что как только точка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежит параллелепипеду

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - \alpha_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + \alpha_1, \\ \bar{x}_2 - \alpha_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{x}_n - \alpha_n \le x_n \le \bar{x}_n + \alpha_n, \end{cases}$$

так сейчас же точка $(f_1, f_2, \dots, f_\mu)$ принадлежит параллелепипеду

$$\begin{cases} \bar{y}_1 - b_1 \le y_1 \le \bar{y}_1 + b_1, \\ \bar{y}_2 - b_2 \le y_2 \le \bar{y}_2 + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{y}_\mu - b_\mu \le y_\mu \le \bar{y}_\mu + b_\mu. \end{cases}$$

Положим $\gamma_i = \min\{a_i, \alpha_i\}$ ($i = \overline{1,n}$). Тогда параллелепипед

$$
(Q) = \begin{cases} \bar{x}_1 - \gamma_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + \gamma_1, \\ \bar{x}_2 - \gamma_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + \gamma_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{x}_n - \gamma_n \le x_n \le \bar{x}_n + \gamma_n \end{cases}
$$

— требуемый.

Действительно, закрепим какую-нибудь осуществимую в (Q) систему $(y_1, y_2, \dots, y_\mu)$. Тогда обязательно окажется, что $(y_1, y_2, \dots, y_\mu)$ принадлежит параллелепипеду

$$
\begin{cases} \bar{y}_1 - b_1 \le y_1 \le \bar{y}_1 + b_1, \\ \bar{y}_2 - b_2 \le y_2 \le \bar{y}_2 + b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{y}_\mu - b_\mu \le y_\mu \le \bar{y}_\mu + b_\mu. \end{cases}
$$

Возьмем теперь в (Q) какую-нибудь осуществляющую точку

$$
(x_1, x_2, \dots, x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n).
$$

Если в этой точке закрепить $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots, x_n$, то в параллелепипеде

$$
\begin{cases} \bar{x}_1 - a_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + a_1, \\ \bar{x}_2 - a_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + a_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{x}_\mu - a_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + a_\mu \end{cases}
$$

и тем более в параллелепипеде

$$
\begin{cases} \bar{x}_1 - \gamma_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + \gamma_1, \\ \bar{x}_2 - \gamma_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + \gamma_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{x}_\mu - \gamma_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + \gamma_\mu \end{cases}
$$

найдется единственная точка $(x_1, x_2, \dots, x_\mu)$, для которой

$$
\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_\mu, \dots, x_n) = y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_\mu, \dots, x_n) = y_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_\mu(x_1, x_2, \dots, x_\mu, \dots, x_n) = y_\mu. \end{gathered}
$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{\mu+1}, \dots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_{\mu+1}, \dots, x_n), \\ &\dots\dots \\ x_\mu &= \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

причем по теореме о неявных функциях у функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ существуют и непрерывны все частные производные первого порядка. (Подчеркнем, что $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ — закреплены.) Отметим, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ определены в параллелепипеде

$$\begin{cases} \bar{x}_{\mu+1} - \gamma_{\mu+1} \le x_{\mu+1} \le \bar{x}_{\mu+1} + \gamma_{\mu+1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{x}_n - \gamma_n \le x_n \le \bar{x}_n + \gamma_n, \end{cases}$$

а точка $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu)$ попадает в

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - a_1 \le x_1 \le \bar{x}_1 + a_1, \\ \bar{x}_2 - a_2 \le x_2 \le \bar{x}_2 + a_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{x}_\mu - a_\mu \le x_\mu \le \bar{x}_\mu + a_\mu. \end{cases}$$

Положим $f_{\mu+1}(\varphi_1, \dots, \varphi_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) = \varphi_{\mu+1}(x_{\mu+1}, \dots, x_n)$. Теорема будет доказана, если мы установим, что на самом деле $\varphi_{\mu+1}$ есть величина постоянная. Для этого заметим, что в параллелепипеде

$$\begin{cases} \bar{x}_{\mu+1} - \gamma_{\mu+1} \le x_{\mu+1} \le \bar{x}_{\mu+1} + \gamma_{\mu+1}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{x}_n - \gamma_n \le x_n \le \bar{x}_n + \gamma_n, \end{cases}$$

тождественно будет

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) &= y_1, \\ f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) &= y_2, \\ &\dots\dots \\ f_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) &= y_\mu, \\ f_{\mu+1}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) - \varphi_{\mu+1} &= 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем эти тождества по x_n (не нарушая общности, будем доказывать независимость $\varphi_{\mu+1}$ от x_n). Получим

$$\left.\begin{array}{r}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\cdot\dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_n}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\cdot 1=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}+\ldots+\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\cdot\dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_n}+\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_n}\cdot 1=0,\\
\dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}+\ldots+\dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu}\cdot\dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_n}+\left(\dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_n}-\dfrac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial x_n}\right)\cdot 1=0.
\end{array}\right\}\quad(*)$$

Итак, числа $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n},\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_n},\ \ldots,\ \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_n},\ 1$ удовлетворяют системе линейных уравнений (*). А так как не все эти числа нули (есть единица), то определитель системы (*) равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}-0\right)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \left(\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_n}-0\right)\\
\dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu} & \left(\dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_n}-\dfrac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial x_n}\right)
\end{vmatrix}=0.$$

Представим его как разность двух определителей, и второй из них разложим по элементам последнего столбца. Получим

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_n}\\
\dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu} & \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_n}
\end{vmatrix}-\dfrac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial x_n}\cdot
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}
\end{vmatrix}=0,$$

или $\Delta_1 - \dfrac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial x_n} \cdot \Delta = 0$. Но $\Delta_1 = 0$, ибо это определитель порядка $(\mu + 1)$ из матрицы ранга μ. Так как $\Delta \neq 0$ всюду в (P_0), то

$$\frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial x_n} = 0,$$

т. е. $\varphi_{\mu+1}$ не зависит от x_n. Аналогично показывается, что $\varphi_{\mu+1}$ не зависит от остальных своих аргументов, т. е.

$$\varphi_{\mu+1} = \text{const},$$

а это и требовалось доказать. ◀

§3. Некоторые дополнительные сведения о якобианах

Якобианом для функций:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

называют определитель

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Обозначают якобиан J также и так:

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Это не дробь, а целый символ (так же как $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$,).

Отметим две аналогии между якобианами и производными.

I. Известно, что если $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$, то

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

(правило цепочки).

Теорема. Пусть функции

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

заданы в открытом параллелепипеде (P) и имеют там непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам x_1, x_2, ..., x_n. Пусть, далее, функции

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \end{aligned}$$

определены в открытом параллелепипеде (T) и имеют там непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам t_1, t_2, ..., t_n. Тогда

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)}.$$

▶ Умножим определитель

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

на определитель

$$\frac{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}{D(t_1,t_2,\dots,t_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

(по правилам: строку на столбец). Если учесть, что

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\dots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_k}=\frac{\partial y_i}{\partial t_k} \qquad (i,k=\overline{1,n}),$$

то произведение определителей можно будет записать так:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix},$$

а это и есть $\dfrac{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}{D(t_1,t_2,\dots,t_n)}$. ◀

II. Известно, что для двух взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $x=g(y)$ будет $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=1$.

Теорема. Пусть функции

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\\ y_2 &= f_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\\ &\dots\dots\dots\\ y_n &= f_n(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{aligned}$$

определены в открытом параллелепипеде (P), а значения их заполняют параллелепипед (T), и пусть для каждой точки $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in(T)$ существует в (P) единственная точка $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, в которой

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=y_1,\\
&f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=y_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=y_n,
\end{aligned}
$$

так что

$$
\begin{aligned}
x_1&=g_1(y_1,y_2,\dots,y_n),\\
x_2&=g_2(y_1,y_2,\dots,y_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n&=g_n(y_1,y_2,\dots,y_n).
\end{aligned}
$$

Пусть все функции f_1, f_2, ..., f_n, g_1, g_2, ..., g_n имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам соответственно в параллелепипедах (P) и (T). Тогда

$$\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\cdot\frac{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}=1.$$

▶ Если взять точку $M(y_1,y_2,\dots,y_n)$ и найти по ней точку $N(x_1,x_2,\dots,x_n)$, где $x_i=g_i(y_1,y_2,\dots,y_n)$ $(i=\overline{1,n})$, а затем исходя из точки N найти $f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(i=\overline{1,n})$, то мы вернемся к точке M. Значит, переменные y_1, y_2, ..., y_n можно рассматривать как функции, зависящие от них же сложным образом через x_1, x_2, ..., x_n. По предыдущей теореме окажется:

$$\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\cdot\frac{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}=\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}.$$

Но

$$\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial y_n}{\partial y_1} & \frac{\partial y_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

§4. Примеры и задачи

Пример 1. Найти $y'(x)$ и $y''(x)$ для функции $y(x)$, определяемой уравнением $x^y = y^x$ $(x \neq y)$.

Решение. Ясно, что должно быть $x > 0$, $y > 0$. Перепишем заданное уравнение в виде

$$e^{y \ln x} = e^{x \ln y}.$$

Продифференцируем обе части написанного равенства по x, помня, что y есть функция от x. Будем иметь

$$e^{y \ln x}\left(y' \ln x + \frac{y}{x}\right) = e^{x \ln y}\left(\ln y + \frac{x}{y} \cdot y'\right) \quad \Rightarrow \quad y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} \cdot y',$$

ибо $e^{y \ln x} = e^{x \ln y}$ $\Rightarrow$ $y' = \dfrac{(x \ln y - y) \cdot y}{(y \ln x - x) \cdot x}$. Из заданного равенства

следует: $y \ln x = x \ln y$. Поэтому $y' = \dfrac{y^2(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)}$. Имеем, далее,

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x =$$

$$= \frac{\left[2yy'(\ln x - 1) + \dfrac{y^2}{x}\right] \cdot x^2(\ln y - 1) - \left[2x(\ln y - 1) + \dfrac{x^2}{y} y'\right] \cdot y^2(\ln x - 1)}{x^4(\ln y - 1)^2}.$$

Подставив вместо y' найденное для него выражение, находим

$$y''(x) = \frac{y^2\left[y(\ln x - 1)^2(2\ln y - 3) - x(\ln y - 1)^2(2\ln x - 3)\right]}{x^4(\ln y - 1)^3}.$$

Пример 2. Найти y', y'', y''' при $x = 0$, $y = 1$, если

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

Решение. Заданное равенство дифференцируем трижды по x, помня, что y есть функция от x. Получим

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0;$$

$$2 - y' - y' - xy'' + 4(y')^2 + 4yy'' - y'' = 0;$$

$$-y'' - y'' - y'' - xy''' + 8y'y'' + 4y'y'' + 4yy''' - y''' = 0.$$

Подставив в полученные соотношения $x=0$, $y=1$, получаем следующую систему уравнений для определения $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$:

$$\begin{cases} 3y' = 0, \\ 2 - 2y' + 4(y')^2 + 3y'' = 0, \\ -3y'' + 12y'y'' + 3y''' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ 2 + 3y'' = 0, \\ 2 + 3y''' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'(0) = 0, \; y''(0) = -\frac{2}{3}, \; y'''(0) = -\frac{2}{3}.$$

Пример 3. Функция $z = z(x,y)$ задана уравнением $x + y + z = = e^{-(x+y+z)}$. Найти частные производные первого и второго порядков.

Решение. Имеем $F(x,y,z) = x + y + z - e^{-(x+y+z)}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{1 + e^{-(x+y+z)}}{1 + e^{-(x+y+z)}} = -1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{1 + e^{-(x+y+z)}}{1 + e^{-(x+y+z)}} = -1.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Пример 4. Пусть

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \qquad (*)$$

и $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Найти $f'_x(1,1,1)$, если $z = z(x,y)$ есть неявная функция, определяемая уравнением (*).

Решение. Имеем

$$f'_x = y^2z^3 + 3xy^2z^2 \cdot z'_x \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,1,1) = 1 + 3z'_x(1,1).$$

z'_x находим из уравнения (*): $F(x,y,z) = 0$, где $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + + z^2 - 3xyz$;

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{2x - 3yz}{2z - 3xy}; \quad z'_x(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = -\frac{-1}{-1} = -1.$$

Следовательно, $f'_x(1,1,1) = 1 - 3 = -2$.

Пример 5. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ при $x=1$, $y=-2$, $z=1$, если

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0. \qquad (*)$$

Решение. 1) Дифференцируем (*) по x, помня, что $z = z(x,y)$.

$$2x + 6z \cdot z'_x + y - z'_x = 0 \Rightarrow \qquad (**)$$

$\Rightarrow$ при $x=1$, $y=-2$, $z=1$: $z'_x = 0$.

2) Дифференцируем (*) по y, помня, что $z = z(x,y)$.

$$4y + 6z \cdot z'_y + x - z'_y = 0 \Rightarrow \qquad (***)$$

$\Rightarrow$ при $x=1$, $y=-2$, $z=1$: $z'_y = \dfrac{7}{5}$.

3) Дифференцируем (**) по x, помня, что $z = z(x,y)$.

$$2 + 6(z'_x)^2 + 6zz''_{xx} - z''_{xx} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x=1$, $y=-2$, $z=1$: $z''_{xx} = -\dfrac{2}{5}$.

4) Дифференцируем (***) по y, помня, что $z = z(x,y)$.

$$4 + 6(z'_y)^2 + 6zz''_{yy} - z''_{yy} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x=1$, $y=-2$, $z=1$: $z''_{yy} = -\dfrac{394}{125}$.

5) Дифференцируем (**) по y, помня, что $z = z(x,y)$.

$$6z'_y z'_x + 6zz''_{xy} + 1 - z''_{xy} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x=1$, $y=-2$, $z=1$: $z''_{xy} = -\dfrac{1}{5}$.

Пример 6. Найти dz и $d^2 z$, если

$$xyz = x + y + z. \qquad (*)$$

Решение. Считаем, что уравнение (*) определяет функцию $z = z(x,y)$. Находим дифференциалы от обеих частей уравнения (*).

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = dx + dy + dz \quad \Leftrightarrow \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - xy)\,dz = (yz - 1)\,dx + (zx - 1)\,dy \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dz = \frac{(yz-1)\,dx + (xz-1)\,dy}{1-xy} \quad (\text{если } xy \neq 1).$$

Находим дифференциалы от обеих частей соотношения (**).

$$z\,dxdy + y\,dxdz + z\,dxdy + x\,dydz + y\,dxdz + x\,dydz + xy\,d^2z = d^2z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1-xy)\,d^2z = 2z\,dxdy + 2y\,dxdz + 2x\,dydz =$$

$$= 2zdxdy + 2y\,dx \cdot \frac{(yz-1)\,dx + (xz-1)\,dy}{1-xy} +$$

$$+ 2x\,dy \cdot \frac{(yz-1)\,dx + (xz-1)\,dy}{1-xy} \quad \Rightarrow \quad d^2z =$$

$$= \frac{2\left[(1-xy)z\,dxdy + y(yz-1)\,(dx)^2 + x(xz-1)\,(dy)^2 + y(xz-1)\,dxdy + x(yz-1)\,dxdy\right]}{(1-xy)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2z = \frac{2\left[y(yz-1)\,(dx)^2 + x(xz-1)\,(dy)^2 + (xyz + z - x - y)\,dxdy\right]}{(1-xy)^2}.$$

Так как $xyz = x + y + z$, то окончательно получаем

$$d^2z = \frac{2\left[y\,(yz-1)\,(dx)^2 + x\,(xz-1)\,(dy)^2 + 2z\,dxdy\right]}{(1-xy)^2}.$$

Пример 7. Найти dz и d^2z, если $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$. (Ясно, что $y \neq 0$, $z \neq 0$.)

Решение. Считаем, что заданное уравнение определяет z как функцию от x и y: $z = z(x,y)$. Находим дифференциалы от обеих частей заданного уравнения.

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{z^2} = \frac{y}{z} \cdot \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad yz\,dx - xy\,dz = yz\,dz - z^2dy \quad \Rightarrow \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad dz = \frac{z(y\,dx + z\,dy)}{y\,(x+z)} \quad (\text{если } x + z \neq 0).$$

Находим теперь дифференциалы от обеих частей соотношения (*), помня, что x и y независимые переменные, а $z = z(x,y)$.

$$z\,dxdy + y\,dxdz - y\,dxdz - x\,dydz - xyd^2z =$$

$$= z\,dydz + y\,(dz)^2 + yz\,d^2z - 2z\,dzdy \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (yz + xy)\,d^2z = z\,dxdy - (x\,dy - z\,dy)\,dz - y\,(dz)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (yz + xy)\,d^2z = z\,dxdy + (z - x)\,dy \cdot \frac{z(y\,dx + z\,dy)}{y\,(x+z)} -$$

$$- y\,\frac{z^2(y\,dx + z\,dy)^2}{y^2(x+z)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2z = -\frac{z^2(x\,dy - y\,dx)^2}{y^2(x+z)^3} \quad (x + z \neq 0).$$

Пример 8. Найти du, если $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$.

Решение. Считаем, что заданное уравнение определяет u как функцию переменных x, y, z: $u = u(x,y,z)$. Находим дифференциалы от обеих частей заданного уравнения:

$$3u^2du - 3\,(dx + dy)\,u^2 - 6(x+y)\,u\,du + 3z^2dz = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [3u^2 - 6\,(x+y)\,u]\,du = 3[u^2(dx+dy) - z^2dz] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad du = \frac{u^2(dx+dy) - z^2dz}{u^2 - 2\,(x+y)\,u}.$$

Пример 9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x-y,\, y-z,\, z-x) = 0$.

Решение. Положим $\xi = x - y$, $\eta = y - z$, $\zeta = z - x$. Тогда $F(\xi,\eta,\zeta) = 0$.

1) Имеем $F'_\xi(\xi,\eta,\zeta)\cdot\xi'_x + F'_\eta(\xi,\eta,\zeta)\cdot\eta'_x + F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)\cdot\zeta'_x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad F'_\xi(\xi,\eta,\zeta)\cdot 1 + F'_\eta(\xi,\eta,\zeta)\cdot(-z'_x) + F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)\cdot(z'_x - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta) - F'_\eta(\xi,\eta,\zeta)\right]\cdot z'_x = -F'_\xi(\xi,\eta,\zeta) + F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_x = \frac{F'_\xi(\xi,\eta,\zeta) - F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)}{F'_\eta(\xi,\eta,\zeta) - F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)}.$$

2) Имеем $F'_\xi(\xi,\eta,\zeta)\cdot\xi'_y + F'_\eta(\xi,\eta,\zeta)\cdot\eta'_y + F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)\cdot\zeta'_y = 0 \quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad F'_\xi(\xi,\eta,\zeta)\cdot(-1) + F'_\eta(\xi,\eta,\zeta)\cdot(1-z'_y) + F'_\zeta(\xi,\eta,\zeta)\cdot z'_y = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F'_\xi - F'_\eta = (F'_\zeta - F'_\eta)\cdot z'_y \quad\Rightarrow\quad z'_y = \frac{F'_\xi - F'_\eta}{F'_\zeta - F'_\eta}.$$

Пример 10. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $F(xz, yz) = 0$.

Решение. Положим $\xi = xz$, $\eta = yz$. Тогда заданное уравнение примет вид

$$F(\xi,\eta) = 0. \tag{*}$$

Имеем

$$dF(\xi,\eta) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad F'_\xi(\xi,\eta)(z\,dx + x\,dz) + F'_\eta(\xi,\eta)(z\,dy + y\,dz) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z(F'_\xi dx + F'_\eta dy) + (xF'_\xi + yF'_\eta)\,dz = 0 \quad\Rightarrow \tag{**}$$

$$\Rightarrow \quad dz = -\frac{z(F'_\xi dx + F'_\eta dy)}{xF'_\xi + yF'_\eta}.$$

Имеем, далее,

$$d^2F(\xi,\eta) = 0 \quad\Rightarrow\quad F''_{\xi^2}(z\,dx + x\,dz)^2 + 2F''_{\xi\eta}(z\,dx + x\,dz)(z\,dy + y\,dz) +$$

$$+ F''_{\eta^2}(z\,dy + y\,dz)^2 + 2(F'_\xi dx + F'_\eta dy)\,dz = -(xF'_\xi + yF'_\eta)\,d^2z. \tag{***}$$

Но

$$z\,dx + x\,dz = z\,dx - \frac{xz(F'_\xi dx + F'_\eta dy)}{xF'_\xi + yF'_\eta} = z\cdot\frac{F'_\eta(y\,dx - x\,dy)}{xF'_\xi + yF'_\eta},$$

$$z\,dy + y\,dz = z\,dy - \frac{yz(F'_\xi dx + F'_\eta dy)}{xF'_\xi + yF'_\eta} = z\cdot\frac{F'_\xi(x\,dy - y\,dx)}{xF'_\xi + yF'_\eta}.$$

Подставляя найденные выражения для $(z\,dx + x\,dz)$ и $(z\,dy + y\,dz)$ в (***), получим

$$F''_{\xi^2}\frac{z^2(F'_\eta)^2(y\,dx - x\,dy)^2}{(xF'_\xi + yF'_\eta)^2} - 2F''_{\xi\eta}\frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{(xF'_\xi + yF'_\eta)^2}z^2F'_\xi F'_\eta +$$

$$+ F''_{\eta^2} \frac{z^2(F'_\xi)^2(x\,dy - y\,dx)^2}{(xF'_\xi + yF'_\eta)^2} - 2(F'_\xi dx + F'_\eta dy)\frac{z(F'_\xi dx + F'_\eta dy)}{(xF'_\xi + yF'_\eta)} =$$

$$= -(xF'_\xi + yF'_\eta)\,d^2 z\,.$$

В полученном соотношении (в правой и левой частях) отделяем слагаемые, имеющие множитель $(dx)^2$. Получим

$$\frac{z^2y^2\left[F''_{\xi^2}(F'_\eta)^2 - 2F''_{\xi\eta}F'_\xi F'_\eta + F''_{\eta^2}(F'_\xi)^2\right]}{(xF'_\xi + yF'_\eta)^2} - \frac{2z(F'_\xi)^2}{xF'_\xi + yF'_\eta} =$$

$$= -(xF'_\xi + yF')\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= -\frac{y^2z^2\left[F''_{\xi^2}(F'_\eta)^2 - 2F'_\xi F'_\eta F''_{\xi\eta} + F''_{\eta^2}(F'_\xi)^2\right] - 2z(xF'_\xi + yF'_\eta)(F'_\xi)^2}{(xF'_\xi + yF'_\eta)^3}\,.$$

Пример 11. Найти $d^2 z$, если

$$F(x+z,\, y+z) = 0\,. \qquad (*)$$

Решение. В силу уравнения (*), считаем $z = z(x,y)$. Положим $\xi = x+z$, $\eta = y+z$. Тогда (*) примет вид $F(\xi,\eta) = 0$. Имеем

$$dF(\xi,\eta) = F'_\xi(\xi,\eta)\,d\xi + F'_\eta(\xi,\eta)\,d\eta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad F'_\xi(\xi,\eta)(dx+dz) + F'_\eta(\xi,\eta)(dy+dz) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[F'_\xi(\xi,\eta) + F'_\eta(\xi,\eta)\right]dz = -\left[F'_\xi(\xi,\eta)\,dx + F'_\eta(\xi,\eta)\,dy\right] \quad \Rightarrow$$

$$dz = -\frac{F'_\xi dx + F'_\eta dy}{F'_\xi + F'_\eta}\,. \qquad (**)$$

$$d^2F(\xi,\eta) = 0:$$

$$F''_{\xi^2}(dx+dz)^2 + 2F''_{\xi\eta}(dx+dz)(dy+dz) +$$
$$+ F''_{\eta^2}(dy+dz)^2 + (F'_\xi + F'_\eta)\,d^2 z = 0\,. \qquad (***)$$

Имеем

$$dx + dz = dx - \frac{F'_\xi dx + F'_\eta dy}{F'_\xi + F'_\eta} = \frac{F'_\eta (dx - dy)}{F'_\xi + F'_\eta},$$

$$dy + dz = dy - \frac{F'_\xi dx + F'_\eta dy}{F'_\xi + F'_\eta} = \frac{F'_\xi (dy - dx)}{F'_\xi + F'_\eta}.$$

Подставляя найденные выражения для $(dx + dz)$ и $(dy + dz)$ в (***), получаем

$$F''_{\xi^2} \frac{(F'_\eta)^2 (dx - dy)^2}{(F'_\xi + F'_\eta)^2} - 2F''_{\xi\eta} \frac{F'_\xi F'_\eta (dx - dy)^2}{(F'_\xi + F'_\eta)^2} + F''_{\eta^2} \frac{(F'_\xi)^2 (dx - dy)^2}{(F'_\xi + F'_\eta)^2} =$$

$$= -(F'_\xi + F'_\eta)\, d^2 z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2 z = -\frac{F''_{\xi^2}(F'_\eta)^2 - 2F''_{\xi\eta} F'_\xi F'_\eta + F''_{\eta^2}(F'_\xi)^2}{(F'_\xi + F'_\eta)^3} (dx - dy)^2 .$$

Пример 12. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $F(x + zy^{-1},$ $y + zx^{-1}) = 0$. Показать, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

Решение. Положим $\xi = x + zy^{-1}$, $\eta = y + zx^{-1}$. Тогда заданное уравнение примет вид $F(\xi, \eta) = 0$. Имеем $dF(\xi, \eta) = F'_\xi d\xi + F'_\eta d\eta = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad F'_\xi \cdot \left(dx + \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2} \right) + F'_\eta \cdot \left(dy + \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F'_\xi \cdot \left(dx - \frac{z}{y^2} dy \right) + F'_\eta \cdot \left(dy - \frac{z}{x^2} dx \right) = -\left(F'_\xi \frac{1}{y} + F'_\eta \frac{1}{x} \right) dz \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dz = -\frac{\left[\left(F'_\xi - \frac{z}{x^2} F'_\eta \right) dx + \left(F'_\eta - \frac{z}{y^2} F'_\xi \right) dy \right] xy}{xF'_\xi + yF'_\eta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{xy\left(\frac{z}{x^2} F'_\eta - F'_\xi \right)}{xF'_\xi + yF'_\eta} dx + \frac{xy\left(\frac{z}{y^2} F'_\xi - F'_\eta \right)}{xF'_\xi + yF'_\eta} dy \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{zF'_\eta - x^2 F'_\xi}{xF'_\xi + yF'_\eta}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{zF'_\xi - y^2 F'_\eta}{xF'_\xi + yF'_\eta}.$$

А тогда

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y(zF'_\eta - x^2 F'_\xi) + x(zF'_\xi - y^2 F'_\eta)}{xF'_\xi + yF'_\eta} =$$

$$= \frac{z(xF'_\xi + yF'_\eta) - xy(xF'_\xi + yF'_\eta)}{xF'_\xi + yF'_\eta} = z - xy.$$

Пример 13. Показать, что неявная функция $z = z(x, y)$, определяемая уравнением

$$y = x\varphi(z) + \psi(z) \qquad (*)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Берем дифференциалы от обеих частей равенства (*).

$$dy = \varphi(z)\,dx + x\varphi'(z)\,dz + \psi'(z)\,dz \quad \Rightarrow \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \quad \big(x\varphi'(z) + \psi'(z)\big)dz = dy - \varphi(z)\,dx \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{\varphi(z)\,dx - dy}{x\varphi'(z) + \psi'(z)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{\varphi(z)}{x\varphi'(z) + \psi'(z)}dx + \frac{1}{x\varphi'(z) + \psi'(z)}dy \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi(z)}{x\varphi'(z) + \psi'(z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x\varphi'(z) + \psi'(z)}.$$

Находим теперь дифференциал от обеих частей равенства (**):

$$0 = \varphi'(z)\,dxdz + \varphi'(z)\,dxdz + x\varphi''(z)\,(dz)^2 + x\varphi'(z)\,d^2 z +$$

$$+ \psi''(z)\,(dz)^2 + \psi'(z)\,d^2 z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \big(x\varphi'(z) + \psi'(z)\big)d^2 z = -2\varphi'(z)\,dxdz - \big(x\varphi''(z) + \psi''(z)\big)(dz)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \big(x\varphi'(z) + \psi'(z)\big)d^2 z = 2\varphi'(z)\,dx\,\frac{\varphi(z)\,dx - dy}{x\varphi'(z) + \psi'(z)} -$$

$$-\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)\cdot\left(\frac{\varphi(z)\,dx-dy}{x\varphi'(z)+\psi'(z)}\right)^2.$$

Сравниваем последовательно коэффициенты при $(dx)^2$, $(dy)^2$, $dxdy$.

$$(dx)^2:\quad \left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\varphi'(z)\,\varphi(z)}{x\varphi'(z)+\psi'(z)}-$$

$$-\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)\cdot\frac{\varphi^2(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\varphi'(z)\,\varphi(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}-\frac{\varphi^2(z)\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^3};$$

$$dxdy:\quad 2\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$$

$$=-\frac{2\varphi'(z)}{x\varphi'(z)+\psi'(z)}+\frac{2\varphi(z)\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\varphi'(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}+\frac{\varphi(z)\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^3};$$

$$(dy)^2:\quad \left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x\varphi''(z)+\psi''(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x\varphi''(z)+\psi''(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^3}.$$

А тогда $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

$$=\frac{1}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}\left[\frac{2\varphi'(z)\,\varphi(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}-\frac{\varphi^2(z)\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^3}\right]+$$

$$+2\cdot\frac{\varphi(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}\left[\frac{\varphi(z)\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^3}-\frac{\varphi'(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}\right]-$$

$$-\frac{\varphi^2(z)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^2}\cdot\frac{\left(x\varphi''(z)+\psi''(z)\right)}{\left(x\varphi'(z)+\psi'(z)\right)^3}=0.$$

Пример 14. Найти $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ при $x=1$, $y=-1$, $z=2$, если

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2, \\ x+y+z=2. \end{cases} \qquad (*)$$

Решение. Система (*) состоит из двух уравнений, связывающих три переменные. Считаем что она определяет функции $x=x(z)$ и $y=y(z)$. Дифференцируем обе части уравнений системы (*) по z. Получаем

$$\begin{cases} 2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}=z, \\ \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0 \end{cases} \Rightarrow \qquad (**)$$

при $x=1$, $y=-1$, $z=2$:

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dz}-2\frac{dy}{dz}=2, \\ \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dx}{dz}=0,\ \frac{dy}{dz}=-1.$$

Дифференцируем теперь по z обе части уравнений системы (**). Получаем

$$\begin{cases} 2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+2x\frac{d^2x}{dz^2}+2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+2y\frac{d^2y}{dz^2}=1, \\ \frac{d^2x}{dz^2}+\frac{d^2y}{dz^2}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

при $x=1$, $y=-1$, $z=2$ находим

$$\begin{cases} 2\frac{d^2x}{dz^2}+2-2\frac{d^2y}{dz^2}=1, \\ \frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4},\ \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 15. Система уравнений

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x \end{cases} \qquad (*)$$

определяет дифференцируемые функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, такие, что $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$. Найти $du(1,2)$ и $dv(1,2)$.

Решение. Находим дифференциалы от обеих частей каждого из уравнений системы (*). Получаем

$$\begin{cases} e^{u+v}dx + xe^{u+v}(du + dv) + 2(v\,du + u\,dv) = 0, \\ e^{u-v}dy + ye^{u-v}(du - dv) - \dfrac{(1+v)\,du - u\,dv}{(1+v)^2} = 2\,dx \end{cases} \Rightarrow$$

при $x = 1$, $y = 2$ ($\Rightarrow u = 0$, $v = 0$) получаем

$$\begin{cases} dx + (du + dv) = 0, \\ dy + 2(du - dv) - du = 2\,dx \end{cases} \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{3}dy, \quad dv = -dx + \frac{1}{3}dy.$$

Пример 16. Пусть

$$\begin{cases} x = t + t^{-1}, \\ y = t^2 + t^{-2}, \\ z = t^3 + t^{-3}. \end{cases} \qquad (*)$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$.

Решение. Можно считать, что система (*) задает функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ следующими параметрическими уравнениями:

$$1) \begin{cases} x = t + t^{-1}, \\ y = t^2 + t^{-2}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t + t^{-1}, \\ z = t^3 + t^{-3}. \end{cases}$$

Имеем $x'_t = 1 - \dfrac{1}{t^2}$, $y'_t = 2t - \dfrac{2}{t^3}$, $z'_t = 3t^2 - \dfrac{3}{t^4}$. А тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2(t^4 - 1)t^2}{t^3(t^2 - 1)} = \frac{2(t^2 + 1)}{t} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (t \neq \pm 1);$$

$$z'_x = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{3(t^6 - 1)t^2}{t^4(t^2 - 1)} = 3\frac{t^4 + t^2 + 1}{t^2} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right) \quad (t \neq \pm 1).$$

Имеем, далее,

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = 2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{t^2}} = 2 \quad (t \neq \pm 1);$$

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = 3\left(2t - \frac{2}{t^3}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{t^2}} = 6\frac{(t^4 - 1)t^2}{t^3(t^2 - 1)} =$$

$$= 6\frac{t^2 + 1}{t} = 6\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (t \neq \pm 1).$$

Пример 17. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $u = 2$, $v = 1$, если $\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv. \end{cases}$

Решение. Имеем $dz = 2(v\,du + u\,dv)$; du и dv находим из системы

$$\begin{cases} dx = du + 2v\,dv, \\ dy = 2u\,du - 3v^2 dv \end{cases} \Rightarrow$$

в точке $u = 2$, $v = 1$:

$$\begin{cases} dx = du + 2dv, \\ dy = 4du - 3dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{11}(2dy + 3dx), \\ dv = \dfrac{1}{11}(4dx - dy). \end{cases}$$

Имеем, далее,

$$d^2 z = 2(2du dv + v\,d^2 u + u\,d^2 v) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ при } u = 2,\ v = 1:\ d^2 z = 2(2du dv + d^2 u + 2d^2 v).$$

$d^2 u$ и $d^2 v$ находим из системы

$$\begin{cases} 0 = d^2 u + 2(dv)^2 + 2v\,d^2 v, \\ 0 = 2(du)^2 + 2u\,d^2 u - 6v(dv)^2 - 3v^2 d^2 v, \end{cases}$$

которая при $u = 2$, $v = 1$ будет такой:

$$\begin{cases} d^2 u + 2d^2 v = -2(dv)^2, \\ 4d^2 u - 3d^2 v = 6(dv)^2 - 2(du)^2. \end{cases}$$

А тогда для d^2z в точке $u=2$, $v=1$ получаем

$$d^2z = 2\left(2\,dudv - 2\,(dv)^2\right) =$$

$$= 2\left[\frac{2}{121}(2dy+3dx)\,(4dx-dy) - \frac{2}{121}(4dx-dy)^2\right].$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $dxdy$ в левой и правой частях полученного равенства, находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{121}(8-3+8) = \frac{26}{121}.$$

Глава 4

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности $u_\rho(M_0)$ точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ и имеет там непрерывные частные производные всех порядков до порядка $(m+1)$ включительно. Пусть точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — любая точка из $u_\rho(M_0)$. Тогда

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + df(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + \\ + \frac{1}{2!} d^2 f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + \ldots + \frac{1}{m!} d^m f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) + \\ + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x_{10} + \theta\Delta x_1, x_{20} + \theta\Delta x_2, \ldots, x_{n0} + \theta\Delta x_n) \end{gathered} \tag{1}$$

где $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$, $\Delta x_2 = x_2 - x_{20}$, , $\Delta x_n = x_n - x_{n0}$; $0 < \theta < 1$.

В развернутом виде формула (1) имеет вид

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^k u \Bigg|_{M_0} +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^{m+1} u\Bigg|_N, \qquad (\tilde{1})$$

где N — точка с координатами $(x_{10}+\theta\Delta x_1, x_{20}+\theta\Delta x_2, \ldots, x_{n0}+\theta\Delta x_n)$ $(0<\theta<1)$.

▶ Доказательство проведем для случая, когда $n=2$ (для $n>2$ оно совершенно аналогичное).

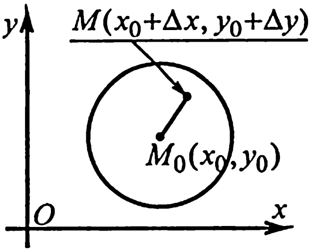


Рис. 4.1

В случае $n=2$ имеем: $u=f(x,y)$; $M_0(x_0,y_0)$; $\Delta x = x-x_0$; $\Delta y = y-y_0$; Δx и Δy — любые, но такие, что точка $M(x,y)=M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in u_\rho(M_0)$. Нужно показать, что

$$\Delta u = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \quad 0<\theta<1.$$

Через точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ проведем прямую. Уравнение этой прямой будет таким:

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = x_0+t\,\Delta x,\\ y=y_0+t\,\Delta y \end{cases} \quad (t \text{ — параметр}) \qquad (2)$$

Замечаем, что точкам отрезка M_0M прямой (2) отвечают значения параметра t от 0 до 1. В частности, точке $M_0(x_0,y_0)$ соответствует значение $t=0$, а точке $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ — значение $t=1$.

Положим

$$u=f(x,y)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)=F(t). \qquad (3)$$

Отметим, что при изменении t от 0 до 1 соответствующая точка (x,y) перемещается вдоль отрезка, соединяющего точки (x_0,y_0) и $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, т. е. не выходит из окрестности $u_\rho(M_0)$, в которой функция $u = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков до порядка $(m+1)$ включительно. Мы знаем, что если функция *одной переменной* $u = F(t)$ определена в промежутке $[0, 1]$ и имеет там непрерывные производные всех порядков до порядка $(m+1)$ включительно, то для любого положения точек t_0 и t в промежутке $[0, 1]$ имеет место формула

$$\Delta u = F(t) - F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \ldots + \frac{1}{m!}d^mF(t_0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}F\big(t_0 + \theta(t - t_0)\big), \tag{4}$$

где $0 < \theta < 1$. Положив в (4) $t_0 = 0$, $t = 1$ $(\Rightarrow (t - t_0) = 1)$, будем иметь

$$\Delta u = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{m!}d^mF(0) + \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}F(\theta). \tag{5}$$

Так как $F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $F(0) = f(x_0, y_0)$, то

$$\Delta u = F(1) - F(0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{6}$$

Из соотношений (2) видим, что у нас промежуточные аргументы x и y выражаются через независимую переменную t линейно. А тогда полные дифференциалы любого порядка сложной функции выражаются через промежуточные аргументы x и y в той же форме, как если бы x и y были независимыми переменными. Поэтому для любого $k = \overline{1, m+1}$

$$d^kF(t) = d^kf(x,y)\Big|_{\substack{x = x_0 + t\Delta x,\\ y = y_0 + t\Delta y}},$$

причем здесь $dx = dt \cdot \Delta x$, $dy = dt \cdot \Delta y$, откуда

$$d^kF(0) = d^kf(x_0, y_0); \qquad d^{m+1}F(\theta) = d^{m+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Поскольку $dt = \Delta t = t - t_0 = 1 - 0 = 1$, то имеем $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Следовательно,

$$d^k F(0) = d^k f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(x_0, y_0), \quad k = \overline{1,m};$$

$$d^{m+1} F(\theta) = d^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \tag{7}$$

Подставив в правую часть (5) найденные выражения для $d^k F(0)$, $k = \overline{1,m}$, и $d^{m+1} F(\theta)$ и приняв во внимание выражение (6), находим

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),$$

где $0 < \theta < 1$. Таким образом, формула Тейлора для случая, когда $n = 2$ установлена. ◀

§2. Обычные экстремумы для функций нескольких переменных

1°. Необходимые условия экстремума.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в некоторой области (D) ($(D) \subset \mathbf{R}^n$). Пусть точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in (D)$.

Если существует окрестность $u_\rho(M_0)$ точки M_0, такая, что для любой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $u_\rho(M_0)$ оказывается

$$f(M) \le f(M_0), \tag{1}$$

то говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 *максимум*. (Предполагается, что $u_\rho(M_0) \subset (D)$.)

Если же для любой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из проколотой окрестности $\mathring{u}_\rho(M_0)$ точки M_0 оказывается

$$f(M) < f(M_0), \tag{2}$$

то говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 *строгий максимум*.

Аналогично определяются *минимум* и *строгий минимум* функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Отметим, что понятия максимума и минимума носят локальный характер, поскольку в определениях фигурируют лишь точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, достаточно близкие к точке M_0.

Функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может иметь в области (D) несколько максимумов и минимумов. Как и в случае функций одной переменной, вместо отдельных наименований “максимум” и “минимум” используют объединяющий их термин — *экстремум*.

Теорема. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ экстремум. Если при этом существуют конечные f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_n} в точке M_0, то обязательно $f'_{x_1}(M_0) = 0$, $f'_{x_2}(M_0) = 0$, , $f'_{x_n}(M_0) = 0$.

▶ Пусть $u_\rho(M_0)$ есть та самая окрестность точки M_0, о которой говорится в определении экстремума функции. Положим $x_2 = x_{20}$, $x_3 = x_{30}$, , $x_n = x_{n0}$, а переменную x_1 оставляем свободной, изменяющейся в промежутке $(x_{10} - \rho, x_{10} + \rho)$. Тогда $u = f(x_1, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$ будет функцией одной переменной x_1, определенной в промежутке $(x_{10} - \rho, x_{10} + \rho)$. По условию функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$. Из этого следует, что функция $u = f(x_1, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$ имеет экстремум при $x_1 = x_{10}$. Так как по условию $f'_{x_1}(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0})$ существует конечная, то получаем $f'_{x_1}(M_0) = 0$.

Аналогично устанавливается, что $f'_{x_2}(M_0) = 0$, , $f'_{x_n}(M_0) = 0$. ◀

Следствие. Точки, в которых функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет экстремум, следует искать среди точек, где либо одновременно $f'_{x_1} = 0$, $f'_{x_2} = 0$, , $f'_{x_n} = 0$, либо где, по крайней мере, одна из этих частных производных не существует или бесконечна. Точки упомянутых здесь двух типов называются *критическими* для функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Отметим, что не всякая критическая точка функции дает экстремум. В самом деле, рассмотрим функцию

$$u = x \cdot y .$$

Имеем $u'_x = y$, $u'_y = x$ (существуют, конечные). Из системы $\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0 \end{cases}$ находим, что точка $(0, 0)$ — критическая. Имеем $u(0, 0) = 0$.

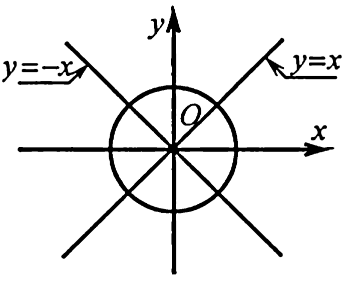


Рис. 4.2

В точках прямой $y = x$, исключая точку $(0, 0)$ и в любой близости от точки $(0, 0)$ будет $u > 0$. Следовательно, в точке $(0, 0)$ нет максимума.

В точках прямой $y = -x$, исключая точку $(0, 0)$ и в любой близости от нее будет $u < 0$. Значит, в точке $(0, 0)$ нет минимума.

Общий вывод: у функции $u = xy$ в точке $O(0, 0)$ нет экстремума.

Замечание. Обращение одновременно в нуль всех частных производных первого порядка функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0, а также несуществование или обращение в бесконечность хотя бы одной из этих частных производных в точке M_0 является необходимым условием существования экстремума у функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0.

II°. Исследование стационарных критических точек (случай функции двух переменных).

Напомним, что функцию $\psi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, где A, B, C — постоянные числа, среди которых есть отличные от нуля, называют *квадратичной формой.* При этом:

1) $\psi(x, y)$ называют *положительно определенной* квадратичной формой, если все значения $\psi \geq 0$ и $\psi = 0$ лишь в точке $(0, 0)$;

2) $\psi(x, y)$ называют *отрицательно определенной* квадратичной формой, если все значения $\psi \leq 0$ и $\psi = 0$ лишь в точке $(0, 0)$;

3) $\psi(x, y)$ называют *неопределенной* квадратичной формой, если $\psi(x, y)$ принимает значения разных знаков;

4) $\psi(x,y)$ называют *полуопределенной* квадратичной формой, если $\psi(x,y)$ принимает значения одного знака, но в нуль обращается не только в точке $(0,0)$.

Так, например, $\psi(x,y)=5x^2+10y^2$ — положительно определенная квадратичная форма; $\psi(x,y)=5x^2-10y^2$ — неопределенная квадратичная форма; $\psi(x,y)=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ — полуопределенная квадратичная форма.

Пусть функция $u=f(x,y)$ определена в $u_{\tilde\rho}(M_0)$ и имеет там непрерывные частные производные первого и второго порядков. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ — стационарная критическая для $f(x,y)$, т. е. одновременно $f'_x(x_0,y_0)=0$ и $f'_y(x_0,y_0)=0$. Напишем формулу Тейлора для функции $f(x,y)$ с центром разложения в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(f''_{xx}(\xi,\eta)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(\xi,\eta)(y-y_0)^2\Big), \tag{1}$$

где (ξ,η) — некоторая точка из $u_{\tilde\rho}(M_0)$. Положим

$$\Delta=2\big(f(x,y)-f(x_0,y_0)\big),\quad x-x_0=h,\quad y-y_0=k.$$

Тогда, приняв во внимание, что по условию $f'_x(x_0,y_0)=0$ и $f'_y(x_0,y_0)=0$, получим вместо (1)

$$\Delta=f''_{x^2}(\xi,\eta)h^2+2f''_{xy}(\xi,\eta)hk+f''_{y^2}(\xi,\eta)k^2. \tag{2}$$

По условию, $f''_{x^2}(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{y^2}(x,y)$ — непрерывные в точке (x_0,y_0). Поэтому

$$f''_{x^2}(\xi,\eta)\xrightarrow[\rho\to 0]{}f''_{x^2}(x_0,y_0),\quad f''_{xy}(\xi,\eta)\xrightarrow[\rho\to 0]{}f''_{xy}(x_0,y_0),$$
$$f''_{y^2}(\xi,\eta)\xrightarrow[\rho\to 0]{}f''_{y^2}(x_0,y_0).$$

(Здесь $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.) Следовательно, можно написать

$$f''_{x^2}(\xi,\eta) = f''_{x^2}(x_0,y_0) + \alpha, \qquad f''_{xy}(\xi,\eta) = f''_{xy}(x_0,y_0) + \beta,$$

$$f''_{y^2}(\xi,\eta) = f''_{y^2}(x_0,y_0) + \gamma,$$

где $\alpha,\beta,\gamma \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Введем обозначения $A = f''_{x^2}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f''_{y^2}(x_0,y_0)$. Подчеркнем, что A, B и C — постоянные числа (предполагаем, что они не равны нулю одновременно). Теперь выражение для Δ может быть записано в виде

$$\Delta = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2. \qquad (3)$$

Обозначим $\psi(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$, $\delta(h,k) = \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2$. Отметим, что $\psi(h,k)$ — квадратичная форма, а $\delta(h,k)$ не является квадратичной формой, ибо коэффициенты α, β, γ зависят от h и k.

Теорема. I. Если квадратичная форма $\psi(h,k)$ — определенная, то у функции $u = f(x,y)$ в точке M_0 имеется строгий экстремум. Это:

а) строгий минимум, если $\psi(h,k)$ — положительно определенная квадратичная форма, и

б) строгий максимум, если $\psi(h,k)$ — отрицательно определенная квадратичная форма.

II. Если $\psi(h,k)$ — неопределенная квадратичная форма, то у функции $u = f(x,y)$ в точке M_0 экстремума нет.

Замечание. Если $\psi(h,k)$ — полуопределенная квадратичная форма, то ничего определенного о наличии или отсутствии экстремума у функции $u = f(x,y)$ в точке M_0 без дополнительных исследований сказать нельзя.

▶ I) Дано: $\psi(h,k)$ — определенная квадратичная форма. Пусть для определенности $\psi(h,k)$ — положительно определенная. Требуется доказать, что функция $u = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ строгий минимум.

Положим $\begin{cases} h = r\cos\theta, \\ k = r\sin\theta. \end{cases}$ Тогда

$$\psi(h,k) = r^2(A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta) = r^2\psi(\cos\theta,\sin\theta).$$

Отметим, что $\psi(\cos\theta,\sin\theta)$ определена и непрерывна на промежутке $[0, 2\pi]$ и принимает только положительные значения, ибо $\cos\theta$ и $\sin\theta$ не обращаются одновременно в нуль. По теореме Вейерштрасса функция $\psi(\cos\theta,\sin\theta)$ на промежутке $[0, 2\pi]$ принимает свои наименьшее m и наибольшее M значения. Ясно, что $m > 0$ и $M > 0$, ибо все значения функции $\psi(\cos\theta,\sin\theta) > 0$. Но тогда, в частности, $\psi(h,k) \geq mr^2$. Имеем

$$\delta(h,k) = r^2(\alpha\cos^2\theta + \beta\sin 2\theta + \gamma\sin^2\theta) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad |\delta(h,k)| \leq r^2(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|).$$

У нас $\alpha,\beta,\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$, а $\rho = \sqrt{h^2+k^2} = r$. Следовательно, $(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)$ — бесконечно малая величина при $\rho \to 0$. Значит, любому $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = m > 0$) отвечает $r_0 > 0$ такое, что как только $0 < r < r_0$, так сейчас же

$$(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|) < m.$$

А тогда $|\delta(h,k)| < mr^2$, если $0 < r < r_0 \Rightarrow \delta(h,k) > -mr^2$, если $0 < r < r_0$. Таким образом, получаем

$$\begin{array}{l}\psi(h,k) \geq mr^2, \text{ для любого } r > 0,\\ \delta(h,k) > -mr^2, \text{ если } 0 < r < r_0\end{array} \quad\Rightarrow\quad \Delta = \psi(h,k) + \delta(h,k) > 0,$$

если $0 < r < r_0 \Rightarrow f(x,y) > f(x_0,y_0)$ для любой точки $M(x,y)$, для которой $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r_0$, т.е. $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ для любой точки $M(x,y)$, лежащей в проколотом круге радиуса r_0 с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$. Следовательно, $M_0(x_0,y_0)$ — точка строгого минимума для функции $u = f(x,y)$. ◀

Совершенно аналогично устанавливается: если $\psi(h,k)$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то $M_0(x_0,y_0)$ — точка строгого максимума для функции $u = f(x,y)$.

▶ II) Дано: $\psi(h,k)$ — неопределенная квадратичная форма. Требуется доказать, что у функции $u = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет экстремума.

Так как $\psi(h,k)$ — неопределенная квадратичная форма, то обязательно существуют точки (h_1,k_1) и (h_2,k_2), такие, что $\psi(h_1,k_1) > 0$, $\psi(h_2,k_2) < 0$.

1) Положим

$$\begin{cases} h = th_1, \\ k = tk_1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{x-x_0}{h_1} = \frac{y-y_0}{k_1} \quad (=t).$$

Это — уравнение прямой (l_1), проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$. Имеем

$$h^2 + k^2 = t^2(h_1^2 + k_1^2) \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 = t^2(h_1^2 + k_1^2) \quad \Rightarrow \quad \rho \to 0, \text{ если } t \to 0.$$

Имеем, далее,

$$\psi(h,k) = t^2(Ah_1^2 + 2Bh_1k_1 + Ck_1^2) = t^2\psi(h_1,k_1);$$

$$\delta(h,k) = t^2(\alpha h_1^2 + 2\beta h_1k_1 + \gamma k_1^2) = t^2\delta(h_1,k_1),$$

где $\alpha,\beta,\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$, а следовательно, $\alpha,\beta,\gamma \to 0$, если $t \to 0 \Rightarrow$ $(\alpha h_1^2 + 2\beta h_1k_1 + \gamma k_1^2) \to 0$, если $t \to 0$, т. е. $\delta(h_1,k_1) \to 0$ при $t \to 0$. Значит, любому $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = \psi(h_1,k_1) > 0$) отвечает $t_0' > 0$ такое, что как только $0 < |t| < t_0'$, так сейчас же

$$|\delta(h_1,k_1)| < \psi(h_1,k_1).$$

А тогда $|\delta(h,k)| < t^2\psi(h_1,k_1)$, если $0 < |t| < t_0' \Rightarrow$ в частности, $\delta(h,k) > -t^2\psi(h_1,k_1)$, если $0 < |t| < t_0'$. Таким образом, получаем

$$\begin{matrix} \psi(h,k) = t^2\psi(h_1,k_1), \text{ для любого } t, \\ \delta(h,k) > -t^2\psi(h_1,k_1), \text{ если } 0 < |t| < t_0' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \psi(h,k) + \delta(h,k) > 0,$$

если $0 < |t| < t_0' \Rightarrow$ $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ для любой точки $M(x,y)$, лежащей в любой близости от точки $M_0(x_0,y_0)$ на прямой $\frac{x-x_0}{h_1} = \frac{y-y_0}{k_1}$ $(=t)$, исключая точку M_0. Следовательно, у функции $u = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет максимума.

2) Положим теперь

$$\begin{cases} h = th_2, \\ k = tk_2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{h_2} = \frac{y - y_0}{k_2} \quad (= t).$$

Это — уравнение прямой (l_2), проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Здесь

$$\rho^2 = h^2 + k^2 = t^2(h_2^2 + k_2^2) \quad \Rightarrow \quad \rho \to 0, \text{ если } t \to 0.$$

Имеем

$$\psi(h,k) = t^2(Ah_2^2 + 2Bh_2k_2 + Ck_2^2) = t^2\psi(h_2,k_2);$$

$$\delta(h,k) = t^2(\alpha h_2^2 + 2\beta h_2k_2 + \gamma k_2^2) = t^2\delta(h_2,k_2),$$

где $\alpha,\beta,\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$, а следовательно, $\alpha,\beta,\gamma \to 0$, если $t \to 0 \Rightarrow$ $\delta(h_2,k_2) = (\alpha h_2^2 + 2\beta h_2k_2 + \gamma k_2^2) \to 0$, если $t \to 0$. Значит, любому $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = -\psi(h_2,k_2) > 0$) отвечает $t_0'' > 0$ такое, что как только $0 < |t| < t_0''$, так сейчас же

$$|\delta(h_2,k_2)| < -\psi(h_2,k_2).$$

А тогда $|\delta(h,k)| < -t^2\psi(h_2,k_2)$, если $0 < |t| < t_0'' \Rightarrow$ в частности, $\delta(h,k) < -t^2\psi(h_2,k_2)$, если $0 < |t| < t_0''$. Таким образом, получаем

$$\begin{matrix} \psi(h,k) = t^2\psi(h_2,k_2), \text{ для любого } t, \\ \delta(h,k) < -t^2\psi(h_2,k_2), \text{ если } 0 < |t| < t_0'' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \psi(h,k) + \delta(h,k) < 0,$$

если $0 < |t| < t_0'' \Rightarrow$ $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ для любой точки $M(x,y)$, лежащей на прямой $\frac{x - x_0}{h_2} = \frac{y - y_0}{k_2}$ $(= t)$ (исключая точку $M_0(x_0,y_0)$) в любой близости от точки $M_0(x_0,y_0)$. Следовательно, у функции $u = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет минимума.

Общий вывод: у функции $u = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ нет экстремума. ◀

III°. Исследование квадратичной формы $\psi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

Пусть имеется квадратичная форма $\psi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Пусть $D = AC - B^2$. Тогда:

1) Если $D > 0$, то $\psi(x,y)$ — определенная квадратичная форма, а именно: $\psi(x,y)$ — положительно определенная, если $A > 0$, и $\psi(x,y)$ — отрицательно определенная, если $A < 0$.

2) Если $D < 0$, то $\psi(x,y)$ — неопределенная квадратичная форма.

3) Если $D = 0$, то $\psi(x,y)$ — полуопределенная квадратичная форма.

▶ 1) Пусть $D > 0 \Leftrightarrow AC - B^2 > 0$. Но тогда обязательно $A \neq 0$. Так как $A \neq 0$, то $\psi(x,y)$ можно записать в виде

$$\psi(x,y) = \frac{1}{A}\left[(Ax+By)^2 + \underbrace{(AC-B^2)}_{>0}y^2\right].$$

Из этого представления $\psi(x,y)$ видим сразу, что все значения $\psi(x,y)$ одного знака и что знак значений $\psi(x,y)$ совпадает со знаком числа A. Имеем, далее:

а) $(Ax+By)^2 \geq 0$, причем $Ax+By=0$ лишь в точках прямой линии, имеющей уравнение $x = -\frac{B}{A}y$;

б) $\underbrace{(AC-B^2)}_{>0}y^2 \geq 0$, причем $(AC-B^2)y^2 = 0$ лишь в точках прямой линии, имеющей уравнение $y = 0$.

Следовательно, одновременно оба слагаемых суммы $(Ax+By)^2 + (AC-B^2)y^2$ обращаются в нуль лишь в точке пересечения линий $y=0$ и $x = -\frac{B}{A}y$, т. е. в точке $O(0,0)$. Итак, получили все значения $\psi(x,y)$ одного знака и $\psi(x,y) = 0$ лишь в точке $(0,0)$. Значит, $\psi(x,y)$ — определенная квадратичная форма. Именно: $\psi(x,y)$ — положительно определенная, если $A > 0$ и $\psi(x,y)$ — отрицательно опре-

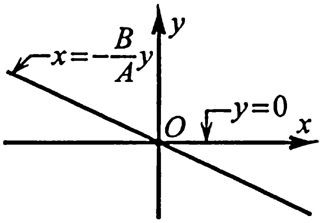


Рис. 4.3

деленная, если $A < 0$, так как в рассматриваемом случае (когда $D > 0$) знак значений $\psi(x,y)$ совпадает со знаком числа A.

2) Пусть $D < 0$. Могут реализоваться следующие случаи:
а) $D < 0,\ A \neq 0$; б) $D < 0,\ C \neq 0$; в) $D < 0,\ A = C = 0\ (\Rightarrow B \neq 0)$.
Рассмотрим случай а) $D < 0,\ A \neq 0$. Так как $A \neq 0$, то $\psi(x,y)$ представима в виде

$$\psi(x,y) = \frac{1}{A}\left[(Ax + By)^2 + (AC - B^2)y^2\right].$$

Имеем, например, $\psi\left(-\frac{B}{A}, 1\right) = \frac{D}{A}$; $\psi(1, 0) = A$. Следовательно,

$$\psi\left(-\frac{B}{A}, 1\right) \cdot \psi(1, 0) = D \ (< 0, \text{ по условию}).$$

Видим, что $\psi(x,y)$ принимает значения разных знаков. Значит, в этом случае $\psi(x,y)$ — неопределенная квадратичная форма.

б) $D < 0$, $C \neq 0$. Этот случай обсуждается аналогично случаю а).

Рассмотрим случай в) $D < 0$, $A = C = 0$ $(\Rightarrow B \neq 0)$. В случае в) квадратичная форма $\psi(x,y)$ имеет вид

$$\psi(x,y) = 2Bxy.$$

Видим, что $\psi(x,y)$ меняет знак вместе с изменением знака произведения $x \cdot y$. Следовательно, в случае в) $\psi(x,y)$ — неопределенная квадратичная форма.

3) Пусть $D = 0$. Могут иметь место следующие случаи:

а) $D = 0$, $A \neq 0$; б) $D = 0$, $C \neq 0$;

в) $D = 0$, $A = 0$ $(\Rightarrow B = 0)$; значит, $C \neq 0$;

г) $D = 0$, $C = 0$ $(\Rightarrow B = 0)$; значит, $A \neq 0$.

Рассмотрим случай а) $D = 0$, $A \neq 0$. В этом случае $\psi(x,y)$ может быть записана в виде

$$\psi(x,y) = \frac{1}{A}\left[(Ax + By)^2 + \underbrace{(AC - B^2)}_{=0}y^2\right] = \frac{1}{A}(Ax + By)^2.$$

Из этого представления $\psi(x,y)$ видим, что все значения $\psi(x,y)$ одного знака и что, например, $\psi\left(-\frac{B}{A},1\right)=0$ и $\psi(0,0)=0$. Значит, $\psi(x,y)$ — полуопределенная квадратичная форма.

б) Случай б): $D=0$, $C\neq 0$ обсуждается аналогично случаю а).

в) $D=0$, $A=B=0$ $(\Rightarrow C\neq 0)$. В этом случае $\psi(x,y)=Cy^2$. Видим, что все значения $\psi(x,y)$ одного знака и что, например, $\psi(1,0)=0$, $\psi(0,0)=0$. Следовательно, $\psi(x,y)$ — полуопределенная квадратичная форма.

г) $D=0$, $C=B=0$ $(\Rightarrow A\neq 0)$ обсуждается аналогично случаю в). ◀

Таким образом, получили следующее правило для исследования на экстремум стационарных критических точек функции $u=f(x,y)$.

1) Находим стационарные критические точки функции $u=f(x,y)$. Для этого определяем все вещественные решения системы $\begin{cases} u'_x=0, \\ u'_y=0. \end{cases}$

2) Для каждой стационарной критической точки (x_0,y_0) вычисляем

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0)\quad \text{и}\quad D=AC-B^2.$$

а) Если $D>0$ и $A>0$, то (x_0,y_0) — точка строгого минимума.

б) Если $D>0$ и $A<0$, то (x_0,y_0) — точка строгого максимума.

в) Если $D<0$, то у функции $u=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) экстремума нет.

г) Если $D=0$, то без дополнительных исследований ничего определенного о наличии или отсутствии экстремума в точке (x_0,y_0) сказать нельзя.

Рассмотрим, например, функцию $u=y^2-2x^2y$.

1) Находим для этой функции стационарные критические точки.

$$\begin{cases} u'_x=0, \\ u'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4xy=0, \\ 2y-2x^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Точка $O(0,0)$ — единственная стационарная критическая точка.

2) Имеем

$$A = f''_{xx}(0,0) = -4y\big|_{(0,0)} = 0, \quad B = f''_{xy}(0,0) = -4x\big|_{(0,0)} = 0,$$

$$C = f''_{yy}(0,0) = 2.$$

Следовательно, $D = AC - B^2 = 0$, так что нужны дополнительные исследования.

Имеем $u(0,0) = 0$. Возьмем линию $y = x^2$, проходящую через точку $(0,0)$. В точках этой линии $u = -x^4 \Rightarrow u \le 0$, причем $u = 0$ лишь в точке $(0,0)$. Значит, у нашей функции в точке $(0,0)$ нет минимума.

Возьмем теперь линию $x = 0$, проходящую через точку $(0,0)$. В точках этой линии $u = y^2 \ge 0$, причем $u = 0$ лишь в точке $(0,0)$. Значит, у нашей функции в точке $(0,0)$ нет максимума.

Общий вывод. У функции $u = y^2 - 2x^2y$ в точке $(0,0)$ нет экстремума.

IV°. Исследование стационарных критических точек в случае функций более чем двух переменных.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой области (D) $((D) \subset \mathbb{R}^n)$ и пусть точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in (D)$. Пусть $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в окрестности $u_{\tilde{\rho}}(M_0)$ точки M_0 непрерывные частные производные первого и второго порядков. Пусть точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ — стационарная критическая точка для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т. е. одновременно $f'_{x_1}(M_0) = 0$, $f'_{x_2}(M_0) = 0$, , $f'_{x_n}(M_0) = 0$. Напишем формулу Тейлора для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с центром разложения в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) =$$

$$= \underbrace{df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}_{=0} + \frac{1}{2!} d^2 f(x_{10} + \theta\Delta x_1, \dots, x_{n0} + \theta\Delta x_n) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 2\left[f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})\right] =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} f''_{x_i x_k}(x_{10} + \theta\Delta x_1, \dots, x_{n0} + \theta\Delta x_n)\Delta x_i \Delta x_k.$$

По условию, $f''_{x_i x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывны в точке M_0. Поэтому

$$f''_{x_i x_k}(x_{10} + \theta\Delta x_1, \dots, x_{n0} + \theta\Delta x_n) \xrightarrow[\rho\to 0]{} f''_{x_i x_k}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$. Следовательно,

$$f''_{x_i x_k}(x_{10} + \theta\Delta x_1, \dots, x_{n0} + \theta\Delta x_n) = f''_{x_i x_k}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \alpha_{ik},$$

где $\alpha_{ik} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$ $(i,k = \overline{1,n})$. Введем обозначение $a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x_{10}, \dots, x_{n0})$. Отметим, что a_{ik} $(i,k = \overline{1,n})$ — постоянные числа. Теперь выражение для Δ может быть записано в виде

$$\Delta = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\Delta x_i \Delta x_k = \psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) + \delta(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n).$$

Здесь $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — квадратичная форма относительно переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$; $\delta(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — не есть квадратичная форма относительно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$, ибо коэффициенты α_{ik} $(i,k = \overline{1,n})$ зависят от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$.

Теорема. I. Если квадратичная форма $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — определенная, то у функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ имеется строгий экстремум. Это:

а) строгий минимум, если $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — положительно определенная квадратичная форма, и

б) строгий максимум, если $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — отрицательно определенная квадратичная форма.

II. Если $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — неопределенная квадратичная форма, то у функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ экстремума нет.

(Принимаем без доказательства; оно аналогично доказательству теоремы для случая двух переменных.)

Замечание 1. Если $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ — полуопределенная квадратичная форма, то без дополнительных исследований ничего определенного о наличии или отсутствии экстремума у функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ сказать нельзя.

Замечание 2. Пусть $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k$ — квадратичная форма. Из алгебры известно (критерий Сильвестра):

1) Для того чтобы квадратичная форма $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы было

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

2) Для того чтобы квадратичная форма $\psi(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы было

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \dots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

§3. Условные (относительные) экстремумы

1°. Пусть функция

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \qquad (1)$$

определена в некоторой области (D) ($(D) \subset \mathbf{R}^{n+m}$). Пусть переменные $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ подчинены еще m дополнительным условиям вида

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

(Условия (2) называются уравнениями связи.)

Пусть точка $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0}) \in (D)$ и такая, что ее координаты удовлетворяют уравнениям связи (2). Пусть $u_\delta(M_0)$ — некоторая δ-окрестность точки M_0 ($u_\delta(M_0) \subset (D)$). Пусть E — множество всех точек из $u_\delta(M_0)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи (2).

Определение. Говорят, что точка M_0 является точкой условного максимума для функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ при наличии связей (2), если оказывается, что для любой точки M из E:

$$f(M) \le f(M_0).$$

Совершенно аналогично определяется условный минимум в точке M_0 функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ при наличии связей (2).

Поясним различие между обычным и условным экстремумами функции на следующем простом примере.

▶ *Пример.* Рассмотрим функцию

$$z = x^2 + y^2. \tag{$\tilde{1}$}$$

Ясно, что эта функция имеет в точке (0, 0) строгий минимум (обычный) $z_{\min} = z(0, 0) = 0$.

Подчиним теперь переменные x и y дополнительному условию

$$x + y - 1 = 0 \quad (F_1(x, y) = 0). \tag{$\tilde{2}$}$$

Заметим, что точка (0, 0) не может быть точкой условного экстремума для функции $z = x^2 + y^2$ при наличии связей ($\tilde{2}$) хотя бы потому, что координаты точки (0, 0) не удовлетворяют уравнению связи ($\tilde{2}$). Ниже будет показано, что у функции $z = x^2 + y^2$ при наличии связи ($\tilde{2}$) существует условный минимум в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и что $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

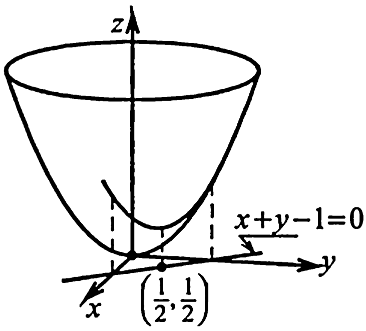


Рис. 4.4

Отметим, что $z_{\min} = z(0, 0) = 0$ есть наименьшая среди всех аппликат поверхности, определяемой уравнением $(\tilde{1})$, а $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ — наименьшая среди аппликат этой поверхности, соответствующих точкам прямой $x + y - 1 = 0$. ◀

Пусть точка $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0})$ является точкой условного экстремума функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ при наличии связей (2).

Предположим, что функция

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

и функции $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ $(i = \overline{1,m})$ в окрестности $u_\delta(M_0)$ точки M_0 непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Предположим, далее, что

$$J(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0}) = \left|\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{matrix}\right|_{(\cdot) M_0} \neq 0.$$

Тогда по теореме об однозначной разрешимости системы уравнений (см. теорию неявных функций) заключаем, что система (2) однозначно разрешима, т. е. определяет функции

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \tag{3}$$

которые в окрестности точки $\tilde{M}_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ $(i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n})$.

Если теперь в выражении $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ в качестве y_1, y_2, ..., y_m иметь в виду соответственно $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, , $\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то получим

$$u = f\big(x_1, x_2, \dots, x_n; \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \dots; \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) =$$
$$= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (4)$$

где $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — сложная функция.

Видим, что существование условного экстремума в точке $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0})$ у функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ при наличии связей (2) равносильно существованию обычного экстремума у функции $u = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $\widetilde{M}_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$.

Заметим, что если нам фактически удается разрешить систему (2) относительно y_1, y_2, ..., y_m, т. е. найти явные выражения для функций (3), то задача о нахождении условного экстремума функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ при наличии связей (2) сводится к задаче о нахождении обычного экстремума функции $u = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ способом, изученным раньше.

Поясним сказанное на примере, приведенном выше. Из уравнения связи находим $y = 1 - x$. Подставляем найденное выражения для y в соотношение $z = x^2 + y^2$. Получаем $z = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. Исследуем на экстремум функцию $z = 2x^2 - 2x + 1$. Имеем $z'_x = 4x - 2 \Rightarrow z'_x = 0$, если $x = \dfrac{1}{2}$. Точка $x = \dfrac{1}{2}$ — стационарная критическая для функции одной переменной $z = 2x^2 - 2x + 1$. Имеем, далее, $z''_{x^2} = 4 \Rightarrow$ в частности, $z''_{x^2}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$ (> 0). Следовательно, точка $x = \dfrac{1}{2}$ — точка строгого минимума для функции $z = 2x^2 - 2x + 1$. Из уравнения связи получаем $y = \frac{1}{2}$, если $x = \frac{1}{2}$. Значит, точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — точка строгого условного минимума для функции $z = x^2 + y^2$ при наличии связи $x + y - 1 = 0$; $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Обсудим случай, когда систему (2) не удается фактически разрешить относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$, т. е. когда не удается получить явные выражения для функций (3).

Найдем для этого случая хотя бы необходимые условия существования экстремума у функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ при наличии связей (2).

Итак, пусть точка $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0}, y_{10}, \ldots, y_{m0})$ является точкой условного экстремума функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ при наличии связей (2). Это значит, что точка $\tilde{M}_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ является точкой обычного экстремума функции $u = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$. Поэтому должно быть

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right|_{(\cdot)\tilde{M}_0} dx_1 + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right|_{(\cdot)\tilde{M}_0} dx_2 + \ldots + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right|_{(\cdot)\tilde{M}_0} dx_n \equiv 0. \qquad (5)$$

(Равенство (5) — тождественное относительно $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, ибо $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ — дифференциалы независимых переменных, и, следовательно, $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, , $dx_n = \Delta x_n$, где $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ — произвольные приращения.) Так как полный дифференциал первого порядка сложной функции обладает свойством инвариантности формы, то условие (5) может быть записано в виде

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(\cdot)M_0} dx_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(\cdot)M_0} dx_2 + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{(\cdot)M_0} dx_n +$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_{(\cdot)M_0} dy_1 + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial y_m}\right|_{(\cdot)M_0} dy_m \equiv 0. \qquad (6)$$

(Заметим, что левая часть (6) равна нулю не тождественно относительно $dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_m$, ибо $dy_1, \ldots, dy_m$ не являются произвольными.) Подчеркнем, что если в уравнениях связи (2) вместо $y_1, \dots, y_m$ иметь в виду функции $\varphi_1(x_1, \dots, x_n)$, , $\varphi_m(x_1, \dots, x_n)$ соответственно, то получим тождества

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0, \end{cases}$$

и, следовательно, $dF_1 = 0$, $dF_2 = 0$, , $dF_m = 0$, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что соотношения (7) выполняются, в частности, в точке M_0. Станем рассматривать систему (7) в точке M_0. Она линейная относительно неизвестных $dy_1, \dots, dy_m$. Так как определителем системы (7) при неизвестных $dy_1, \dots, dy_m$ является якобиан $J(M_0)$, а он не равен нулю, то система (7) имеет единственное решение. Найдем из (7) выражения для $dy_1, \dots, dy_m$ через $dx_1, \dots, dx_n$ и подставим их в (6). После приведения подобных членов получим соотношение вида

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n = 0. \tag{8}$$

В соотношении (8) $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, , $dx_n = \Delta x_n$ — произвольные приращения. Положив в (8) $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_n = 0$, получим $A_1 = 0$. Положив затем $\Delta x_1 = 0$, $\Delta x_2 = 1$, $\Delta x_3 = \dots = \Delta x_n = 0$, получим $A_2 = 0$, и т. д. Положив, наконец, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{n-1} = 0$, а $\Delta x_n = 1$, получим $A_n = 0$. Таким образом, из соотношения (8) следует, что

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots, \quad A_n = 0. \tag{9}$$

Если к соотношениям (9) присоединить m уравнений связи, которым удовлетворяют координаты точки $M_0(x_{10},\dots,x_{n0},y_{10},\dots,y_{m0})$, то получим систему из $(n+m)$ уравнений для определения $(n+m)$ координат $(x_{10},\dots,x_{n0},y_{10},\dots,y_{m0})$ точки возможного условного экстремума функции $u=f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ при наличии связей (2).

II°. Метод Лагранжа для отыскания точек, подозрительных на условный экстремум.

В предыдущем пункте I, при рассмотрении вопроса об условном экстремуме, переменным $x_1,\dots,x_n$ и переменным $y_1,\dots,y_m$ отводились разные роли, а именно: $x_1,\dots,x_n$ трактовались как независимые переменные, а $y_1,\dots,y_m$ — как зависимые. Лагранж предложил метод, при котором все переменные равноправны.

Умножим равенства (7) из §3, соответственно, на произвольные (пока неизвестные) множители λ_1, λ_2, ..., λ_m и результаты почленно сложим с (6). Получим

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right)dx_1+\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_2}\right)dx_2+\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_n}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_n}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right)dx_n+\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_1}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\right)dy_1+\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial y_m}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial y_m}+\dots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\right)dy_m=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Все производные в соотношении (10) вычислены в точке $M_0(x_{10},\dots,x_{n0},y_{10},\dots,y_{m0})$ (мы пока сохраняем неравноправие переменных).

Попытаемся подобрать числа λ_1, λ_2, ..., λ_m такими, чтобы обращались в нуль коэффициенты при зависимых дифференциалах dy_1, dy_2, ..., dy_m, т. е. чтобы было

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}=0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_m}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}+\ldots+\lambda_m\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}=0. \end{cases} \tag{11}$$

Видим, что такие числа обязательно найдутся, ибо (11) есть линейная система относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ с определителем $J(x_{10},\ldots,x_{n0},y_{10},\ldots,y_{m0})\neq 0$. Если ввести в рассмотрение функцию (*функцию Лагранжа*)

$$\psi=f+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\ldots+\lambda_mF_m, \tag{12}$$

то система (11) запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial y_1}=0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y_m}=0. \end{cases} \tag{$\widetilde{11}$}$$

Заметим, что если в качестве чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ брать их значения, определяемые системой (11) (или, что то же самое, системой ($\widetilde{11}$)), то соотношение (10) через функцию Лагранжа с учетом ($\widetilde{11}$) запишется в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n=0. \tag{13}$$

В соотношении (13) $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ — дифференциалы независимых переменных, т. е. $dx_1=\Delta x_1$, $dx_2=\Delta x_2$, , $dx_n=\Delta x_n$, где $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ — произвольные приращения.

Положив в (13) $\Delta x_1=1$, $\Delta x_2=\Delta x_3=\ldots=\Delta x_n=0$, получим $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}=0$. Положив затем $\Delta x_1=0$, $\Delta x_2=1$, $\Delta x_3=\ldots=\Delta x_n=0$, получим $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}=0$, и т. д. Положив, наконец, $\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=$ $=\Delta x_{n-1}=0$, а $\Delta x_n=1$, получим $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}=0$. Таким образом, при указанном выше выборе чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, получаем, что в точке $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0})$ возможного условного экстремума должно быть

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0, \\ \quad\dots \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0, \\ \quad\dots \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y_m} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Если к уравнениям системы (14) присоединить уравнения связи (2), то получим систему $(n+2m)$ уравнений для определения $(n+2m)$ неизвестных. Этими неизвестными являются $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и координаты $(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0})$ точки M_0 возможного условного экстремума.

III°. Замечание о достаточных условиях для условного экстремума.

Пусть имеется функция

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \tag{1}$$

и уравнения связи

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Считаем, что функции f и F_i $(i = \overline{1,m})$ определены в области (D) $((D) \subset \mathbf{R}^{n+m})$. Пусть точка $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0})$ — стационарная критическая точка для функции Лагранжа

$$\psi = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m. \tag{12}$$

Пусть $u_\delta(M_0)$ — δ-окрестность точки M_0 (считаем, что $u_\delta(M_0) \subset (D)$). Предполагаем, что функции f и F_i $(i = \overline{1,m})$ имеют в $u_\delta(M_0)$ непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Пусть E — множество всех точек из $u_\delta(M_0)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи (2). Следовательно, $F_1(M)=F_2(M)=\ldots=F_m(M)=0$, если точка $M\in E$. Но тогда для любой точки $M\in E$ будем иметь

$$\Delta f = f(M)-f(M_0)=\psi(M)-\psi(M_0)=\Delta\psi . \qquad (15)$$

Для функции ψ напишем формулу Тейлора с центром разложения в точке M_0:

$$\Delta\psi = d\psi\big|_{M_0}+\frac{1}{2}d^2\psi\big|_N ,$$

где N — некоторая точка из $u_\delta(M_0)$. Так как точка M_0 — стационарная критическая для функции ψ, то $d\psi\big|_{M_0}=0$ и, следовательно,

$$\Delta\psi = \frac{1}{2}d^2\psi\big|_N . \qquad (16)$$

Введем в рассмотрение $d^2\psi\big|_{M_0}$. Имеем

$$d^2\psi\big|_{M_0}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2\psi\Bigg|_{(\bullet)M_0}+$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\bigg|_{M_0}d^2y_1+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_m}\bigg|_{M_0}d^2y_m .$$

Но $\dfrac{\partial\psi}{\partial y_1}\bigg|_{M_0}=0$, , $\dfrac{\partial\psi}{\partial y_m}\bigg|_{M_0}=0$ (см. ($\widetilde{11}$)). Поэтому

$$d^2\psi\big|_{M_0}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial}{\partial y_1}dy_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2\psi\Bigg|_{(\bullet)M_0} . \qquad (17)$$

Отметим, что $d^2\psi\big|_{M_0}$ не является квадратичной формой относительно $dx_1,\ldots,dx_n$, $dy_1,\ldots,dy_m$, так как дифференциалы $dy_1,\ldots,dy_m$ зависят от дифференциалов $dx_1,\ldots,dx_n$.

У нас зависимые и независимые дифференциалы связаны системой линейных соотношений (7). Так как по условию определитель $J(M_0) \neq 0$, то из (7) зависимые дифференциалы $dy_1, \dots, dy_m$ выразятся линейно через независимые $dx_1, \dots, dx_n$. Если в соотношение (17) подставить вместо $dy_1, \dots, dy_m$ их выражения через $dx_1, \dots, dx_n$, то для $d^2\psi\big|_{M_0}$ получим квадратичную форму относительно дифференциалов $dx_1, \dots, dx_n$. Можно доказать, что:

1) Если эта квадратичная форма окажется определенной, то у функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ при наличии связей (2) в точке M_0 будет условный экстремум. Это:

а) условный минимум, если квадратичная форма положительно определенная, и

б) условный максимум, если квадратичная форма отрицательно определенная.

2) Если же упомянутая квадратичная форма окажется неопределенной, то условного экстремума в точке M_0 у функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ при наличии связей (2) нет.

(Доказательства справедливости утверждений 1) и 2) интересующийся может найти в книге Л.Д. Кудрявцева “Курс математического анализа”, т. 2, а также в книге Г.М. Фихтенгольца “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, т. 1.)

§4. Примеры и задачи на экстремумы функций нескольких переменных

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

Решение. Находим частные производные $z'_x = 2x - y - 2$, $z'_y = -x + 2y + 1$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1, \ y = 0.$$

Значит, точка $M_1(1, 0)$ — стационарная критическая.

Для проверки достаточных условий локального экстремума находим частные производные второго порядка: $z''_{x^2} = 2$, $z''_{xy} = -1$, $z''_{y^2} = 2$. Имеем

$$A = z''_{x^2}(M_1) = 2, \quad B = z''_{xy}(M_1) = -1,$$

$$C = z''_{y^2}(M_1) = 2, \quad D = AC - B^2 = 3 \ (> 0).$$

Так как $D > 0$ и $A > 0$, то $M_1(1, 0)$ — точка строгого минимума $z_{\min} = z(1, 0) = -1$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Имеем $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0, & y_1 = 0, \\ x_2 = 1, & y_2 = 1. \end{matrix}$$

Значит, $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$ — стационарные критические точки. Имеем, далее, $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$.

1) Для точки $M_1(0, 0)$:

$$A = z''_{x^2}(0, 0) = 0, \quad B = z''_{xy}(0, 0) = -3,$$

$$C = z''_{y^2}(0, 0) = 0, \quad D = AC - B^2 = -9 \ (< 0).$$

Следовательно, у заданной функции в точке $M_1(0, 0)$ экстремума нет.

2) Для точки $M_2(1, 1)$:

$$A = z''_{x^2}(1, 1) = 6, \quad B = z''_{xy}(1, 1) = -3,$$

$$C = z''_{y^2}(1, 1) = 6, \quad D = AC - B^2 = 27 \ (> 0).$$

Так как $D > 0$ и $A > 0$, то $M_2(1, 1)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z(1, 1) = -1$.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

Решение. Имеем $z'_x = 8x^3 - 2x$, $z'_y = 4y^3 - 4y$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 - 1) = 0, \\ y(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, y_1 = 0; \quad x_2 = 0, y_2 = 1; \quad x_3 = 0, y_3 = -1;$$

$$x_4 = \frac{1}{2}, y_4 = 0; \quad x_5 = \frac{1}{2}, y_5 = 1; \quad x_6 = \frac{1}{2}, y_6 = -1; \quad x_7 = -\frac{1}{2}, y_7 = 0;$$

$$x_8 = -\frac{1}{2}, y_8 = 1; \quad x_9 = -\frac{1}{2}, y_9 = -1.$$

Значит, $M_1(0, 0)$, $M_2(0, 1)$, $M_3(0, -1)$, $M_4\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $M_5\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_6\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $M_7\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ — стационарные критические точки.

Имеем, далее, $z''_{x^2} = 24x^2 - 2$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{y^2} = 12y^2 - 4$.

1) Для точки $M_1(0, 0)$:

$$A = z''_{x^2}(0, 0) = -2, \quad B = z''_{xy}(0, 0) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}(0, 0) = -4, \quad D = AC - B^2 = 8 \ (> 0).$$

Так как $D > 0$ и $A < 0$, то $M_1(0, 0)$ — точка строгого максимума; $z_{\max} = z(0, 0) = 0$.

2) Для точки $M_2(0, 1)$:

$$A = z''_{x^2}(0, 1) = -2, \quad B = z''_{xy}(0, 1) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}(0, 1) = 8, \quad D = AC - B^2 = -16 \ (< 0).$$

Следовательно, в точке $M_2(0, 1)$ экстремума нет.

3) Для точки $M_3(0, -1)$:

$$A = z''_{x^2}(0,-1) = -2, \quad B = z''_{xy}(0,-1) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}(0,-1) = 8, \quad D = AC - B^2 = -16 \ (< 0).$$

Следовательно, в точке $M_3(0, -1)$ экстремума нет.

4) Для точки $M_4\left(\frac{1}{2}, 0\right)$:

$$A = z''_{x^2}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 4, \quad B = z''_{xy}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -4, \quad D = AC - B^2 = -16 \ (< 0).$$

Следовательно, в точке $M_4\left(\frac{1}{2},0\right)$ экстремума нет.

5) Для точки $M_5\left(\frac{1}{2},1\right)$:

$$A = z''_{x^2}\left(\frac{1}{2},1\right) = 4, \quad B = z''_{xy}\left(\frac{1}{2},1\right) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}\left(\frac{1}{2},1\right) = 8, \quad D = AC - B^2 = 32 \quad (> 0).$$

Так как $D > 0$ и $A > 0$, то $M_5\left(\frac{1}{2},1\right)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2},1\right) = -\frac{9}{8}$.

6) Для точки $M_6\left(\frac{1}{2},-1\right)$:

$$A = z''_{x^2}\left(\frac{1}{2},-1\right) = 4, \quad B = z''_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}\left(\frac{1}{2},-1\right) = 8, \quad D = AC - B^2 = 32 \quad (> 0).$$

Так как $D > 0$ и $A > 0$, то $M_6\left(\frac{1}{2},-1\right)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2},-1\right) = -\frac{9}{8}$.

7) Для точки $M_7\left(-\frac{1}{2},0\right)$:

$$A = z''_{x^2}\left(-\frac{1}{2},0\right) = 4, \quad B = z''_{xy}\left(-\frac{1}{2},0\right) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}\left(-\frac{1}{2},0\right) = -4, \quad D = AC - B^2 = -16 \quad (< 0).$$

Следовательно, в точке $M_7\left(-\frac{1}{2},0\right)$ экстремума нет.

8) Для точки $M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$A = z''_{x^2}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 4, \quad B = z''_{xy}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 8, \quad D = AC - B^2 = 32 \quad (> 0).$$

Так как $D > 0$ и $A > 0$, то $M_8\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{9}{8}$.

9) Для точки $M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$:

$$A = z''_{x^2}\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = 4, \quad B = z''_{xy}\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = 8, \quad D = AC - B^2 = 32 \quad (> 0).$$

Так как $D > 0$ и $A > 0$, то $M_9\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{9}{8}$.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - y + 1)^2$.

Решение. Имеем $z'_x = 2(x - y + 1)$, $z'_y = -2(x - y + 1)$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - y + 1) = 0, \\ -2(x - y + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ все точки прямой $x - y + 1 = 0$ — стационарные критические. Имеем, далее, $z''_{x^2} = 2$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{y^2} = 2$. Следовательно, в каждой точке прямой $x - y + 1 = 0$: $A = 2$, $B = -2$, $C = 2$, $D = AC - B^2 = 0$. Нужны дополнительные исследования.

По виду заданной функции замечаем, что $z = 0$ в каждой точке прямой $x - y + 1 = 0$ и что $z > 0$ в любой точке плоскости, не лежащей на этой прямой. Значит, каждая точка прямой $x - y + 1 = 0$ является точкой нестрогого минимума.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

Решение. Имеем $z'_x = xy^3(12 - 3x - 2y)$, $z'_y = x^2y^2(18 - 3x - 4y)$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^3(12 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2y^2(18 - 3x - 4y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0, \; y \text{ – любое;} \\ y = 0, \; x \text{ – любое;} \\ x = 2, \; y = 3. \end{matrix}$$

Значит, точки $M_1(2, 3)$; $M_2(0, y)$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $M_3(x, 0)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ — стационарные критические точки. Имеем, далее,

$$z''_{x^2} = 12y^3 - 6xy^3 - 2y^4, \quad z''_{xy} = 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3,$$

$$z''_{y^2} = 36x^2y - 6x^3y - 12x^2y^2.$$

1) Для точки $M_1(2, 3)$:

$$A = z''_{x^2}(2, 3) = -162, \quad B = z''_{xy}(2, 3) = -108, \quad C = z''_{y^2}(2, 3) = -144,$$

$$D = AC - B^2 = 162 \cdot 144 - 108^2 > 0.$$

Так как $D > 0$, $A < 0$, то $M_1(2, 3)$ — точка строгого максимума; $z_{\max} = z(2, 3) = 108$.

2) Для точек $M(0, y)$:

$$A = z''_{x^2}(0, y) = 12y^3 - 2y^4, \quad B = z''_{xy}(0, y) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}(0, y) = 0, \quad D = AC - B^2 = 0.$$

Нужны дополнительные исследования.

Найдем приращение заданной функции в точке $M_2(0, y)$. Имеем

$$\Delta z(0, y) = f(0 + \Delta x, y + \Delta y) - f(0, y) = f(0 + \Delta x, y + \Delta y) - 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta z(0, y) = (\Delta x)^2(y + \Delta y)^3(6 - \Delta x - y - \Delta y) =$$

$$= (\Delta x)^2(y + \Delta y)^2\left[6(y + \Delta y) - \Delta x(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2\right].$$

Видим, что знак приращения $\Delta z(0, y)$ определяется знаком величины

$$\left[6(y+\Delta y)-\Delta x(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2\right].$$

При достаточно малых Δx и Δy знак величины, стоящей в квадратных скобках, будет совпадать со знаком величины $(6y-y^2)$, когда $(6y-y^2)\neq 0$. Выясним, для каких значений y: $6y-y^2>0$ и для каких значений y: $6y-y^2<0$.

а) $6y-y^2=y(6-y)>0$ для $0<y<6$.

Так как $z(M_2)=z(0,y)=0$ и так как $\Delta z(0,y)>0$ для $y\in(0,6)$, то заключаем, что заданная функция в точках $M_2(0,y)$, когда $0<y<6$, имеет нестрогий минимум.

б) $6y-y^2=y(6-y)<0$ для $y=(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$.

Так как $z(M_2)=z(0,y)=0$ и так как $\Delta z(0,y)<0$ для $y=(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$, то заключаем, что заданная функция в точках $M_2(0,y)$, когда $y=(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$, имеет нестрогий максимум.

Отметим, что в точках $\widetilde{M}_2(0,0)$ и $\widetilde{\widetilde{M}}_2(0,6)$ функция $z=f(x,y)$ экстремума не имеет, ибо при $x=0$ приращение $\Delta z(0,y)$ меняет знак при переходе переменной y через точки $y=0$ и $y=6$.

3) Для точек $M_3(x,0)$:

$$A=z''_{x^2}(x,0)=0,\qquad B=z''_{xy}(x,0)=0,$$

$$C=z''_{y^2}(x,0)=0,\qquad D=AC-B^2=0.$$

Нужны дополнительные исследования.

Найдем приращение заданной функции $z=f(x,y)$ в точке $M_3(x,0)$. Имеем

$$\Delta z(x,0)=f(x+\Delta x,0+\Delta y)-f(x,0)=f(x+\Delta x,0+\Delta y)-0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \Delta z(x,0)=(x+\Delta x)^2(\Delta y)^3(6-x-\Delta x-\Delta y)=$$

$$=(x+\Delta x)^2(\Delta y)^2\left[6\Delta y-x\Delta y-\Delta x\Delta y-(\Delta y)^2\right].$$

Видим, что знак приращения $\Delta z(x, 0)$ определяется знаком величины $\left[6\Delta y - x\Delta y - \Delta x\Delta y - (\Delta y)^2\right]$. При достаточно малых Δx и Δy знак величины, стоящей в квадратных скобках, будет совпадать со знаком величины $(6-x)\Delta y$. Следовательно, для $x \in (-\infty, 6)$: $\Delta z(x, 0) > 0$, если $\Delta y > 0$, и $\Delta z(x, 0) < 0$, если $\Delta y < 0$; для $x \in (6, +\infty)$: $\Delta z(x, 0) < 0$, если $\Delta y > 0$, и $\Delta z(x, 0) > 0$, если $\Delta y < 0$.

У нас в точках $M_3(x,0)$: $z(x, 0) = 0$ ($z = 0$ в точках оси Ox). При переходе через ось Ox функция $z = f(x,y)$ меняет знак как для $x \in (-\infty, 6)$, так и для $x \in (6, +\infty)$. Следовательно, в точках $M_3(x, 0)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ функция $z = f(x,y)$ экстремума не имеет.

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Решение. Имеем $z'_x = 4x^3 - 2x - 2y$, $z'_y = 4y^3 - 2x - 2y$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^3 - x - y = 0, \\ 2y^3 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, y_1 = 0; \ x_2 = 1, y_2 = 1; \ x_3 = -1, y_3 = -1.$$

Значит, $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(-1, -1)$ — стационарные критические точки. Имеем, далее, $z''_{x^2} = 12x^2 - 2$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{y^2} = 12y^2 - 2$.

1) Для точки $M_1(0, 0)$:

$$A = z''_{x^2}(0, 0) = -2, \quad B = z''_{xy}(0, 0) = -2,$$

$$C = z''_{y^2}(0, 0) = -2, \quad D = AC - B^2 = 0.$$

Нужны дополнительные исследования. Имеем $z(0, 0) = 0$.

а) Возьмем линию $y = x$, проходящую через точку $(0, 0)$. В точках этой линии $z = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2) \Rightarrow z < 0$, если $0 < |x| < \sqrt{2}$. Значит, в точке $(0, 0)$ нет минимума.

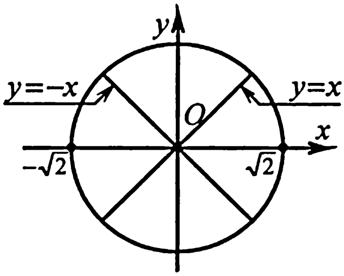


Рис. 4.5

б) Возьмем теперь линию $y=-x$, проходящую через точку $(0, 0)$. В точках этой линии $z=2x^4 \geq 0$, причем $z=0$ лишь в точке $(0,0)$. Значит, в точке $(0, 0)$ нет максимума.

Общий вывод. У функции $z=f(x,y)$ в точке $(0,0)$ нет экстремума.

2) Для точки $M_2(1, 1)$:

$$A = z''_{x^2}(1, 1) = 10, \quad B = z''_{xy}(1, 1) = -2,$$

$$C = z''_{y^2}(1, 1) = 10, \quad D = AC - B^2 = 96 \ (>0).$$

Так как $D>0$ и $A>0$, то $M_2(1, 1)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z(1, 1) = -2$.

3) Для точки $M_3(-1, -1)$:

$$A = z''_{x^2}(-1, -1) = 10, \quad B = z''_{xy}(-1, -1) = -2, \quad C = z''_{y^2}(-1, -1) = 10,$$

$$D = AC - B^2 = 96 \ (>0).$$

Так как $D>0$ и $A>0$, то $M_3(-1, -1)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z(-1, -1) = -2$.

Пример 7. Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x>0, \ y>0).$$

Решение. Имеем $z'_x = y - \dfrac{50}{x^2}$, $z'_y = x - \dfrac{20}{y^2}$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \dfrac{50}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=5, \ y=2.$$

Значит, $M(5,2)$ — стационарная критическая точка. Имеем, далее, $z''_{x^2}=\dfrac{100}{x^3}$, $z''_{xy}=1$, $z''_{y^2}=\dfrac{40}{y^3}$. Для точки $M(5,2)$:

$$A=z''_{x^2}(5,2)=\frac{4}{5},\qquad B=z''_{xy}(5,2)=1,$$

$$C=z''_{y^2}(5,2)=5,\qquad D=AC-B^2=3\ (>0).$$

Так как $D>0$ и $A>0$, то $M(5,2)$ — точка строгого минимума; $z_{\min}=z(5,2)=30$.

Пример 8. Исследовать на экстремум функцию $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ ($a>0$, $b>0$).

Решение. Должно быть: $1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$. Имеем

$$z'_x=y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-xy\frac{x}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{y\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}};$$

$$z'_y=\frac{x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

(считаем, что $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$). Стационарные критические точки, лежащие внутри эллипса, находим из системы

$$\begin{cases}z'_x=0,\\ z'_y=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad \begin{cases}y\left(1-2\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)=0,\\ x\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-2\dfrac{y^2}{b^2}\right)=0\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x_1=0,\ y_1=0;\quad x_2=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y_2=\frac{b}{\sqrt{3}};$$

$$x_3 = \frac{a}{\sqrt{3}},\ y_3 = -\frac{b}{\sqrt{3}};\quad x_4 = -\frac{a}{\sqrt{3}},\ y_4 = \frac{b}{\sqrt{3}};\quad x_5 = -\frac{a}{\sqrt{3}},\ y_5 = -\frac{b}{\sqrt{3}}$$

Значит, $M_1(0,0)$, $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $M_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $M_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ $M_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ — стационарные критические точки. Имеем, далее

$$z''_{x^2} = \frac{-\frac{xy}{a^2}\left(3 - 2\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}},$$

$$z''_{xy} = \frac{1 - 3\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{x^4}{a^4} + 2\frac{y^4}{b^4} + 3\frac{x^2y^2}{a^2b^2}}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}},$$

$$z''_{y^2} = \frac{-\frac{xy}{b^2}\left(3 - 2\frac{y^2}{b^2} - 3\frac{x^2}{a^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}.$$

1) Для точки $M_1(0, 0)$:

$$A = z''_{x^2}(0, 0) = 0, \quad B = z''_{xy}(0, 0) = 1,$$

$$C = z''_{y^2}(0, 0) = 0, \quad D = AC - B^2 = -1 \ (< 0).$$

Значит, $M_1(0, 0)$ не является точкой экстремума.

2) Для точки $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$:

$$A = z''_{x^2}(M_2) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{a}, \quad B = z''_{xy}(M_2) = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$C = z''_{y^2}(M_2) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{b},\ D = AC - B^2 = 4 \ (> 0).$$

Так как $D>0$ и $A<0$, то $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ — точка строгого максимума; $z_{\max}=z\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

3) Для точки $M_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$:

$$A=z''_{x^2}(M_3)=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{a},\quad B=z''_{xy}(M_3)=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$C=z''_{y^2}(M_3)=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{b},\ D=AC-B^2=4\ \ (>0).$$

Так как $D>0$ и $A>0$, то $M_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ — точка строгого минимума; $z_{\min}=z\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

4) Для точки $M_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$:

$$A=z''_{x^2}(M_4)=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{a},\quad B=z''_{xy}(M_4)=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$C=z''_{y^2}(M_4)=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{b},\ D=AC-B^2=4\ \ (>0).$$

Так как $D>0$ и $A>0$, то $M_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ — точка строгого минимума; $z_{\min}=z\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

5) Для точки $M_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$:

$$A = z''_{x^2}(M_5) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{a}, \quad B = z''_{xy}(M_5) = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$C = z''_{y^2}(M_5) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{b}, \ D = AC - B^2 = 4 \ (>0).$$

Так как $D > 0$ и $A < 0$, то $M_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ — точка строгого максимума; $z_{\max} = z\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

Пример 9. Исследовать на экстремум функцию $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Решение. Имеем

$$z'_x = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - (ax + by + c)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}}{x^2 + y^2 + 1} =$$

$$= \frac{a(x^2 + y^2 + 1) - x(ax + by + c)}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}},$$

$$z'_y = \frac{b(x^2 + y^2 + 1) - y(ax + by + c)}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}.$$

Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \left.\begin{cases} a(x^2 + y^2 + 1) - x(ax + by + c) = 0 \\ b(x^2 + y^2 + 1) - y(ax + by + c) = 0 \end{cases}\right| \begin{matrix} \cdot(-b) \\ \cdot a \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (bx - ay)(ax + by + c) = 0, \\ a(x^2 + y^2 + 1) - x(ax + by + c) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Рассмотрим случаи: α) $c = 0$ и β) $c \neq 0$.

Система (*) в случае α) будет такой:

$$\begin{cases} (bx - ay)(ax + by) = 0, \\ a(y^2 + 1) - bxy = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1) \begin{cases} bx - ay = 0, \\ a(y^2+1) - bxy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx = ay, \\ a(y^2+1) - ay^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx = ay, \\ a = 0 \end{cases}$$

— невозможно (у нас $a \neq 0$);

$$2) \begin{cases} ax + by = 0, \\ a(y^2+1) - bxy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = -by, \\ a(y^2+1) + \dfrac{b^2}{a} y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{b}{a} y, \\ (a^2 + b^2) y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$

— невозможно.

Таким образом, в случае α) система (*) не имеет вещественных решений. Значит, если $c = 0$, то функция $z(x, y)$ не имеет стационарных точек.

Рассмотрим теперь случай β) : $c \neq 0$. Из системы (*) следует:

$$1) \begin{cases} bx - ay = 0, \\ a(y^2+1) - bxy - cx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b}{a} x, \\ a\left(\dfrac{b^2}{a^2} x^2 + 1\right) - \dfrac{b^2}{a} x^2 - cx = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b}{a} x, \\ a - cx = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{c}, \; y = \frac{b}{c}.$$

значит, $M\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right)$ — стационарная критическая точка.

2) $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a(x^2 + y^2 + 1) = 0 \end{cases}$ невозможно, ибо $a(x^2 + y^2 + 1) \neq 0$ при $a \neq 0$. Итак, у заданной функции имеется единственная стационарная критическая точка $M\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right)$. Для проверки достаточных условий локального экстремума найдем частные производные второго порядка: z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}. Имеем

$$z''_{x^2} = -\frac{by+c}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} - \frac{3x\left[a(x^2+y^2+1)-x(ax+by+c)\right]}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}$$

$$z''_{xy} = -\frac{ay+bx}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} + \frac{3xy(ax+by+c)}{(x^2+y^2+1)^{5/2}},$$

$$z''_{y^2} = -\frac{ax+c}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} - \frac{3y\left[b(x^2+y^2+1)-y(ax+by+c)\right]}{(x^2+y^2+1)^{5/2}}$$

Для точки $M\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$:

$$A = z''_{x^2}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right) = -\frac{b^2+c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}},$$

$$B = z''_{xy}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}},$$

$$C = z''_{y^2}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right) = -\frac{a^2+c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}},$$

$$D = AC - B^2 = \frac{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}{c^2\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3}} - \frac{a^2b^2}{c^2\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3}} =$$

$$= \frac{c^2(a^2+b^2+c^2)}{c^2\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3}} \quad (>0).$$

Так как $D>0$, то $M\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$ — точка экстремума.

1) Если $c > 0$, то $A < 0$. В этом случае $M\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ — точка строгого максимума; $z_{\max} = z\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2) Если $c < 0$, то $A > 0$, и, следовательно, в этом случае $M\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Пример 10. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Имеем для любой точки, отличной от точки $(0,0)$:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Видим, что заданная функция не имеет стационарных критических точек. Покажем, что у данной функции в точке $(0,0)$ не существуют частные производные первого порядка. В самом деле, имеем

1) $\Delta_x z(0,0) = z(0 + \Delta x, 0) - z(0,0) = \left(1 - \sqrt{(0 + \Delta x)^2 - 0}\right) - 1 = -|\Delta x| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta_x z(0,0)}{\Delta x} = -\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta x < 0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z(0,0)}{\Delta x}$$

не существует.

2) $\Delta_y z(0,0) = z(0, 0 + \Delta y) - z(0,0) = \left(1 - \sqrt{0 + (0 + \Delta y)^2}\right) - 1 = -|\Delta y| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta_y z(0,0)}{\Delta y} = -\frac{|\Delta y|}{\Delta y} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta y < 0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta y > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z(0,0)}{\Delta y}$$

не существует.

Значит, точка $M(0,0)$ — критическая для заданной функции. Исследуем ее. Имеем $z(0,0) = 1$. Найдем приращение Δz функции в точке $(0,0)$.

$$\Delta z(0,0) = z(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - z(0,0) =$$

$$= \left(1 - \sqrt{(0 + \Delta x)^2 + (0 + \Delta y)^2}\right) - 1 = -\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Видим, что $\Delta z(0,0) < 0$. Следовательно, данная функция $z = f(x,y)$ в точке $(0,0)$ имеет строгий максимум; $z_{\max} = z(0,0) = 1$.

Пример 11. Исследовать на экстремум функцию $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

Решение. Имеем $z'_x = 2x(1 - x^2 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$, $z'_y = 2y(1 - x^2 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$;

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ y(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M(0,0)$ и все точки окружности $x^2 + y^2 = 1$ являются стационарными критическими для заданной функции. Имеем, далее,

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= 2e^{-(x^2+y^2)}(1 - 5x^2 - y^2 + 2x^4 + 2x^2y^2), \\ z''_{xy} &= 4e^{-(x^2+y^2)}xy(x^2 + y^2 - 2), \\ z''_{y^2} &= 2e^{-(x^2+y^2)}(1 - 5y^2 - x^2 + 2y^4 + 2x^2y^2). \end{aligned}$$

Для точки $M(0,0)$:

$$A = z''_{x^2}(0,0) = 2, \quad B = z''_{xy}(0,0) = 0,$$

$$C = z''_{y^2}(0,0) = 2, \quad D = AC - B^2 = 4 \ (> 0).$$

Так $D > 0$ и $A > 0$, то $M(0,0)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

Для исследования стационарных критических точек заданной функции, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 1$, положим $x^2 + y^2 = t$ и станем рассматривать функцию одной переменной t: $z = te^{-t}$. Имеем $z'_t = (1 - t)\, e^{-t} \Rightarrow z'_t = 0$ при $t = 1$. Значит, $t = 1$ — стационарная критическая точка функции $z(t)$. Имеем, далее, $z''_{t^2} = (t - 2)\, e^{-t}$. Так как $z''_{t^2}\big|_{t=1} = -e^{-1} < 0$, то функция $z(t)$ имеет максимум в точке $t = 1$. Следовательно, функция $z = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$ имеет нестрогий максимум в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$, причем $z_{\max} = e^{-1}$.

Пример 12. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Решение. Имеем $u'_x = 2x+2$, $u'_y = 2y+4$, $u'_z = 2z-6$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0, \\ u'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1=0, \\ y+2=0, \\ z-3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M(-1,-2,3)$ — стационарная критическая точка. Имеем, далее,

$$\begin{aligned} u''_{x^2} &= 2, & u''_{xy} &= 0, & u''_{xz} &= 0, \\ u''_{yx} &= 0, & u''_{y^2} &= 2, & u''_{yz} &= 0, \\ u''_{zx} &= 0, & u''_{zy} &= 0, & u''_{z^2} &= 2. \end{aligned}$$

Для точки $M(-1,-2,3)$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 2, & a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 2. \end{aligned}$$

Так как

$$a_{11} = 2 \ (>0), \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \ (>0),$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \ (>0),$$

то заключаем, что $M(-1,-2,3)$ — точка строгого минимума; $z_{\min} = z(-1,-2,3) = -14$.

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Решение. Имеем $u'_x = 3x^2 + 12y$, $u'_y = 2y + 12x$, $u'_z = 2z + 2$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0, \\ u'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 4y = 0, \\ y + 6x = 0, \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 0, & x_2 = 24, \\ y_1 = 0, & y_2 = -144, \\ z_1 = -1; & z_2 = -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow M_1(0,0,-1)$, $M_2(24,-144,-1)$ — стационарные критические точки. Имеем, далее,

$$u''_{x^2} = 6x, \quad u''_{xy} = 12, \quad u''_{xz} = 0,$$
$$u''_{yx} = 12, \quad u''_{y^2} = 2, \quad u''_{yz} = 0,$$
$$u''_{zx} = 0, \quad u''_{zy} = 0, \quad u''_{z^2} = 2.$$

1) Для точки $M_2(24, -144, -1)$:

$$a_{11} = 144, \quad a_{12} = 12, \quad a_{13} = 0,$$
$$a_{21} = 12, \quad a_{22} = 2, \quad a_{23} = 0,$$
$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 2.$$

Так как $a_{11} = 144 \ (> 0)$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 \ (> 0)$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 \ (> 0),$$

то квадратичная форма положительно определенная. Следовательно, $M_2(24, -144, -1)$ — точка строгого минимума; $u_{\min} = u(24, -144, -1) = -6913$.

2) Для точки $M_1(0, 0, -1)$: $a_{11} = 0$. Поэтому вопрос о наличии или отсутствии экстремума в этой точке требует дальнейших исследований. Имеем

$$du = 3x^2 dx + 2y\,dy + 2z\,dz + 12y\,dx + 12x\,dy + 2\,dz;$$
$$d^2u = 6x(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 24dxdy \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad d^2u\Big|_{M_1} = 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 24dxdy + 0\cdot(dx)^2.$$

Рассматриваем квадратичную форму $\psi = 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 24\,dxdy + 0\cdot(dx)^2$. (Если хотя бы в двух точках эта квадратичная форма принимает значения разных знаков, то она неопределенная.) Положим:

α) $dx = 1$, $dy = 1$, $dz = 0$. Тогда $\psi(1, 1, 0) = 26 \ (> 0)$;

β) $dx = 1$, $dy = -1$, $dz = 0$. Тогда $\psi(1, -1, 0) = -24 \ (< 0)$.

Видим, что квадратичная форма ψ — неопределенная. Значит, у заданной функции в точке $M_1(0, 0, -1)$ экстремума нет.

Пример 14. Исследовать на экстремум функцию $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

Решение. Имеем $u'_x = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2}$, $u'_y = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2}$, $u'_z = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2}$. Стационарные критические точки заданной функции в первом октанте ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) находим из системы

$$\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0, \\ u'_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x^2, \\ y^3 = 2xz^2, \\ z^3 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \ \text{(т. к. } x > 0, y > 0), \\ z = 2x \ \text{(т. к. } x > 0, z > 0), \\ 8x^3 = 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, \ y = 1, \ z = 1.$$

$M\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$ — стационарная критическая точка. Имеем, далее,

$$\begin{array}{lll} u''_{x^2} = \dfrac{y^2}{2x^3}, & u''_{xy} = -\dfrac{y}{2x^2}, & u''_{xz} = 0, \\ u''_{yx} = -\dfrac{y}{2x^2}, & u''_{y^2} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3}, & u''_{yz} = -\dfrac{2z}{y^2}, \\ u''_{zx} = 0, & u''_{zy} = -\dfrac{2z}{y^2}, & u''_{z^2} = \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3}. \end{array}$$

Для точки $M\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 4, & a_{12} = -2, & a_{13} = 0, \\ a_{21} = -2, & a_{22} = 3, & a_{23} = -2, \\ a_{31} = 0, & a_{32} = -2, & a_{33} = 6. \end{array}$$

Так как

$$a_{11} = 4 \ (> 0), \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \ (> 0),$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 \ (> 0),$$

то квадратичная форма положительно определенная, и, следовательно, $M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ — точка строгого минимума; $u_{\min} = u\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$.

Пример 15. Исследовать на экстремум функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0. \qquad (*)$$

Решение. Имеем $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$;

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-2}{2z-4}; \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y+2}{2z-4}$$

(считаем, что $z \neq 2$). Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 1, & y_1 = -1, & z_1 = -2; \\ x_2 = 1, & y_2 = -1, & z_2 = 6. \end{matrix}$$

Точки $M_1(1, -1, -2)$ и $M_2(1, -1, 6)$ — стационарные критические. Из уравнения (*) находим

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz - 2dx + 2dy - 4dz = 0 \quad \Rightarrow \quad dz = 0$$

в стационарных критических точках, т. е. $dz(M_1) = 0$ и $dz(M_2) = 0$. Затем вычисляем второй дифференциал в стационарных критических точках:

$$2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2z\,d^2z - 4d^2z = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (z-2)\,d^2z = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1) $d^2z(M_1) = \frac{1}{4}\left[(dx)^2 + (dy)^2\right]$ — положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, M_1 — точка строгого минимума, причем $z_{\min} = -2$;

2) $d^2z(M_2) = -\frac{1}{4}\left[(dx)^2 + (dy)^2\right]$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Следовательно, M_2 — точка строгого максимума, причем $z_{\max} = 6$.

Пример 16. Исследовать на экстремум функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

Решение. Имеем $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2$;

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x - z + 2}{2z - x - y + 2}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y - z + 2}{2z - x - y + 2}.$$

Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z + 2 = 0, \\ 2y - z + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll} x_1 = -3 - \sqrt{6}, & y_1 = -3 - \sqrt{6}, & z_1 = -\left(4 + 2\sqrt{6}\right); \\ x_2 = -3 + \sqrt{6}, & y_2 = -3 + \sqrt{6}, & z_2 = 2\sqrt{6} - 4. \end{array}$$

$M_1\left(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}, -4 - 2\sqrt{6}\right)$ и $M_2\left(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}, 2\sqrt{6} - 4\right)$ — стационарные критические точки. Из заданного уравнения находим

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz - z\,dx - x\,dz - z\,dy - y\,dz + 2\,dx + 2dy + 2\,dz = 0.$$

Отметим, что в стационарных критических точках $dz = 0$, т. е. $dz(M_1) = 0$, $dz(M_2) = 0$. Вычисляем второй дифференциал в стационарных критических точках:

$$2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2z\,d^2z - dzdx - dxdz - dzdy - dydz + 2d^2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (z+1)\,d^2z + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - dxdz - dydz = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1) $d^2z(M_1) = \frac{1}{3 + 2\sqrt{6}}\left[(dx)^2 + (dy)^2\right]$ — положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, M_1 — точка строгого минимума; $z_{\min} = -\left(4 + 2\sqrt{6}\right)$.

2) $d^2z(M_2)=\frac{1}{3-2\sqrt{6}}\left[(dx)^2+(dy)^2\right]$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Следовательно, M_2 — точка строгого максимума, $z_{\max}=2\sqrt{6}-4$.

Пример 17. Исследовать на экстремум функцию $z(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2). \qquad (*)$$

Решение. Имеем $F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-a^2(x^2+y^2-z^2)$;

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{x(2x^2+2y^2+2z^2-a^2)}{z(2x^2+2y^2+2z^2+a^2)};$$

$$z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{y(2x^2+2y^2+2z^2-a^2)}{z(2x^2+2y^2+2z^2+a^2)}$$

(считаем $z\neq 0$). Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} z'_x=0,\\ z'_y=0,\\ F=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2+2y^2+2z^2-a^2)=0,\\ y(2x^2+2y^2+2z^2-a^2)=0,\\ (x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1) $x_1=0,\ y_1=0,\ z_1=0$ (не подходит, у нас $z\neq 0$).

$$2)\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2},\\ (x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2},\\ x^2+y^2-z^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{8},\\ z^2=\dfrac{a^2}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ стационарными критическими точками заданной функции будут все точки $M_2\left(x,y,\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$, $M_3\left(x,y,-\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$, для которых $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$.

3) Отметим, что системы

$$\begin{cases} x=0, \\ 2x^2+2y^2+2z^2-a^2=0, \\ (x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=0, \\ 2x^2+2y^2+2z^2-a^2=0, \\ (x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2) \end{cases}$$

дают соответственно: $\begin{cases} x=0, \\ y^2=3a^2/8, \\ z^2=a^2/8 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2=3a^2/8, \\ y=0, \\ z^2=a^2/8. \end{cases}$ Легко видеть, что решения этих систем содержатся в решениях пункта 2).

Таким образом, стационарными критическими точками заданной функции являются лишь точки $M_2\left(x, y, \dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ и $M_3\left(x, y, -\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)$, для которых $x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{8}$ (это есть точки, лежащие на поверхности, определяемой заданным уравнением (*), соответствующие точкам окружности: $x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{8}$, т. е. точки пересечения поверхности, определяемой уравнением (*) с цилиндрической поверхностью, определяемой уравнением $x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{8}$). Из заданного уравнения (*) находим

$$2(x^2+y^2+z^2)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)-a^2(x\,dx+y\,dy-z\,dz)=0.$$

Находим второй дифференциал:

$$4(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2+2(x^2+y^2+z^2)\cdot\left[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2+z\,d^2z\right]-$$

$$-a^2\left[(dx)^2+(dy)^2-(dz)^2-z\,d^2z\right]=0.$$

Вычислим теперь второй дифференциал в стационарных критических точках M_2 и M_3. Приняв во внимание, что $dz|_{M_2}=0$, $dz|_{M_3}=0$, $z|_{M_2}=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, $z|_{M_3}=-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ и что $(x^2+y^2+z^2)\big|_{M_2}=\dfrac{a^2}{2}$, $(x^2+y^2+z^2)\big|_{M_3}=\dfrac{a^2}{2}$, получаем

$$d^2z\Big|_{M_2} = -\frac{4\sqrt{2}}{a^3}(x\,dx + y\,dy)^2, \qquad d^2z\Big|_{M_3} = \frac{4\sqrt{2}}{a^3}(x\,dx + y\,dy)^2.$$

Имеем

$$(x\,dx + y\,dy)^2 = x^2(dx)^2 + 2xy\,dxdy + y^2(dy)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = x^2,\ B = xy,\ C = y^2,\ D = AC - B^2 = x^2y^2 - x^2y^2 = 0.$$

Значит, без дополнительных исследований ничего определенного о наличии или отсутствии экстремума в точках M_2 и M_3 сказать нельзя.

В уравнении (*) положим $x^2 + y^2 = r^2$. Будем иметь

$$(r^2 + z^2)^2 = a^2(r^2 - z^2) \quad \Rightarrow \quad z^2 = \frac{\sqrt{a^4 + 8a^2r^2} - (a^2 + 2r^2)}{2}.$$

У нас в точках поверхности, определяемой уравнением (*), соответствующих точкам окружности $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}$, т. е. в точках M_2 и M_3: $z^2 = \frac{a^2}{8}$. Станем вычислять значения аппликат точек поверхности (*), соответствующих точкам окружностей $x^2 + y^2 = r^2$, где $r^2 = \frac{3a^2}{8} + \varepsilon$ (ε — достаточно малая величина). Будем иметь

$$z^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^4 + 3a^4 + 8a^2\varepsilon} - \left(a^2 + \frac{3a^2}{4} + 2\varepsilon\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{4a^4 + 8a^2\varepsilon} - \left(\frac{7}{4}a^2 + 2\varepsilon\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a^2\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon}{a^2}} - \frac{7}{4}a^2 - 2\varepsilon\right] = a^2\left[\left(1 + \frac{2\varepsilon}{a^2}\right)^{1/2} - \frac{7}{8} - \frac{\varepsilon}{a^2}\right] =$$

$$= a^2\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\varepsilon}{a^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2\varepsilon}{a^2}\right)^2 + o(\varepsilon^2) - \frac{7}{8} - \frac{\varepsilon}{a^2}\right] =$$

$$= a^2\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{a^4} + o(\varepsilon^2)\right] = \frac{a^2}{8} - \frac{\varepsilon^2}{2a^2} + o(\varepsilon^2) < \frac{a^2}{8}.$$

Итак, получили: значения величин аппликат точек поверхности (*), соответствующих точкам окружностей $x^2+y^2=r^2$, где $r^2=\dfrac{3a^2}{8}+\varepsilon$, удовлетворяют неравенству

$$z^2<\frac{a^2}{8} \quad\Leftrightarrow\quad |z|<\frac{a}{2\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{a}{2\sqrt{2}}<z<\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно, точки $M_2\left(x,y,\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ — точки нестрогого максимума, а точки $M_3\left(x,y,-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ — точки нестрогого минимума (x и y в точках M_2, M_3 удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{8}$); $z_{\max}=z(M_2)=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$, $z_{\min}=z(M_3)=-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Пример 18. Исследовать на условный экстремум функцию $z=xy$, если $x+y=1$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа $\psi=xy+\lambda(x+y-1)$. Точки, подозрительные на условный экстремум, находим из системы

$$\begin{cases}\psi'_x=0,\\ \psi'_y=0,\\ x+y=1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}y+\lambda=0,\\ x+\lambda=0,\\ x+y=1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ \lambda=-\frac{1}{2}.$$

$M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ — точка, подозрительная на условный экстремум. Имеем

$$\psi=xy-\frac{1}{2}(x+y-1) \quad\Rightarrow\quad d\psi=x\,dy+y\,dx-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy;$$

$d^2\psi=dxdy+dydx=2dxdy \Rightarrow$ в частности, $d^2\psi(M)=d^2\psi\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=2\,dxdy$.

Из уравнения связи находим $dx+dy=0\Rightarrow\ dy=-dx$. А тогда $d^2\psi(M)=-2(dx)^2$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Следовательно, $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ — точка условного максимума функции $z = xy$ при наличии связи $x + y = 1$, причем $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Пример 19. Исследовать на условный экстремум функцию $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа $\psi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Точки, подозрительные на условный экстремум, находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0, \\ \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2a\lambda}, \\ y = -\frac{1}{2b\lambda}, \\ \frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}$ (если a и b — числа одного знака); $x_1 = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y_1 = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}$ (если a и b — числа разных знаков); $x_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1) Пусть $ab > 0$ (т. е. a и b — числа одного знака). В этом случае $M_1\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ — стационарная критическая точка.

$$\psi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}(x^2 + y^2 - 1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d\psi = \frac{1}{a}\,dx + \frac{1}{b}\,dy + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}(x\,dx + y\,dy);$$

$$d^2\psi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}\left[(dx)^2 + (dy)^2\right].$$

Из уравнения связи $x\,dx + y\,dy = 0$; следовательно, в частности, в точке M_1

$$-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}dx - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}dy = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{b}{a}dx.$$

А тогда $d^2\psi(M_1) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)(dx)^2$ — положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, M_1 — точка строгого условного минимума; $z_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$.

2) Пусть $ab < 0$ (т. е. a и b — числа разных знаков). В этом случае $M_2\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ — стационарная критическая точка.

$$\psi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}(x^2+y^2-1);$$

$$d^2\psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left[(dx)^2+(dy)^2\right].$$

Из уравнения связи $x\,dx + y\,dy = 0$; следовательно, в частности, в точке M_2

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}dx + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}dy = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{b}{a}dx.$$

А тогда $d^2\psi(M_2) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)(dx)^2$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Следовательно, M_2 — точка строгого условного максимума;

$$z_{\max} = z(M_2) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

Пример 20. Исследовать на условный экстремум функцию $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, если $4x^2 + y^2 = 25$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа

$$\psi = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25).$$

Точки, подозрительные на условный экстремум, находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 12y + 8\lambda x = 0, \\ 12x + 4y + 2\lambda y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 4\lambda)x + 6y = 0, \\ 6x + (2 + \lambda)y = 0, \\ 4x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Рассмотрим первые два уравнения системы. Так как x и y не могут быть равны нулю одновременно (это следует из третьего уравнения системы), то должно быть

$$\begin{vmatrix} 1 + 4\lambda & 6 \\ 6 & 2 + \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 + 4\lambda)(2 + \lambda) - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 9\lambda - 34 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{17}{4}.$$

I. Пусть $\lambda_1 = 2$. Тогда будем иметь

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x, \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2, \\ y_1 = 3 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} x_2 = 2, \\ y_2 = -3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M_1(-2, 3)$ и $M_2(2, -3)$ — стационарные критические точки. В этом случае

$$\psi = x^2 + 12xy + 2y^2 + 8x^2 + 2y^2 - 50 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy - 50;$$

$$d\psi = 18x\,dx + 8y\,dy + 12y\,dx + 12x\,dy,$$

$$d^2\psi = 18(dx)^2 + 24dxdy + 8(dy)^2.$$

1) Исследуем точку $M_1(-2, 3)$. Из уравнения связи: $8x\,dx + 2y\,dy = 0 \Rightarrow$ в точке $M_1(-2, 3)$: $dy = \frac{8}{3}dx$. Следовательно,

$d^2\psi(M_1) = \left(18 + 24\cdot\frac{8}{3} + 8\cdot\frac{64}{9}\right)(dx)^2$ — положительно определенная квадратичная форма. Значит, $M_1(-2, 3)$ — точка условного минимума. $z_{\min} = z(M_1) = z(-2, 3) = -50$.

2) Исследуем точку $M_2(2, -3)$. Из уравнения связи $8x\,dx + 2y\,dy = 0 \Rightarrow$ в точке $M_2(2, -3)$: $dy = \frac{8}{3}dx$. Следовательно, $d^2\psi(M_2) = \left(18 + 24\cdot\frac{8}{3} + 8\cdot\frac{64}{9}\right)(dx)^2$ — положительно определенная квадратичная форма. Значит, $M_2(2, -3)$ — точка строгого условного минимума; $z_{\min} = z(M_2) = z(2, -3) = -50$.

II. Пусть $\lambda_2 = -\frac{17}{4}$. Тогда будем иметь

$$\begin{cases} y = \frac{8}{3}x, \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_3 = \frac{3}{2}, & x_4 = -\frac{3}{2} \\ y_3 = 4, & y_4 = -4 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точки $M_3\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ и $M_4\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$ — стационарные критические точки. В этом случае $\psi = x^2 + 12xy + 2y^2 - \frac{17}{4}(4x^2 + y^2 - 25)$; $d\psi =$ $= -32x\,dx + 12xdy + 12ydx - \frac{9}{2}y\,dy$; $d^2\psi = -32(dx)^2 + 24dxdy - \frac{9}{2}(dy)^2$.

3) Исследуем точку $M_3\left(\frac{3}{2}, 4\right)$. Из уравнения связи: $8x\,dx + 2y\,dy = 0 \Rightarrow$ в точке $M_3\left(\frac{3}{2}, 4\right)$: $dy = -\frac{3}{2}dx$. Следовательно, $d^2\psi(M_3) = \left(-32 - 36 - \frac{81}{8}\right)(dx)^2$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Значит, $M_3\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ — точка строгого условного максимума; $z_{\max} = z\left(\frac{3}{2}, 4\right) = 106.25$.

4) Исследуем точку $M_4\left(-\frac{3}{2},-4\right)$. Из уравнения связи: $8x\,dx+2y\,dy=0 \Rightarrow$ в точке $M_4\left(-\frac{3}{2},-4\right)$: $dy=-\frac{3}{2}dx$. Следовательно, $d^2\psi(M_4)=\left(-32-36-\frac{81}{8}\right)(dx)^2$ — отрицательно определенная квадратичная форма. Значит, $M_4\left(-\frac{3}{2},-4\right)$ — точка строгого условного максимума; $z_{\max}=z\left(-\frac{3}{2},-4\right)=106.25$.

Пример 21. Исследовать на условный экстремум функцию $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, если $x-y=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Из уравнения связи находим: $y=x-\frac{\pi}{4}$. Подставляем найденное выражение для y в соотношение $z=\cos^2 x+\cos^2 y$. Получим функцию одной переменной x:

$$z=\cos^2 x+\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (*)$$

Исследуем функцию (*) на обычный экстремум. Имеем

$$z'_x=-2\cos x\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin 2x-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sin 2x=\cos 2x-\sin 2x.$$

Критические точки функции (*) находим из уравнения

$$z'_x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x-\sin 2x=0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2x=1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi}{4}+n\pi \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\dots) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+n\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$. (Это — стационарные критические точки.) Имеем, далее,

$$z''_{x^2} = -2\sin 2x - 2\cos 2x = -2(\sin 2x + \cos 2x) = -2\sqrt{2}\cdot\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

В критических точках

$$z''_{x^2}\Big|_{x=\frac{\pi}{8}+n\frac{\pi}{2}} = -2\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z''_{x^2} < 0 \quad \text{в точках} \quad x = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}, \quad \text{если} \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots ,$$

$$\text{и} \quad z''_{x^2} > 0 \quad \text{в точках} \quad x = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}, \quad \text{если} \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots .$$

Имеем, следовательно, точки $\left(\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}\right)$, где $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, есть точки строгого условного максимума, $z_{\max} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, а точки $\left(\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}\right)$, где $n = \pm 1, \pm 3, \dots$, есть точки строгого условного минимума, $z_{\min} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 22. Исследовать на условный экстремум функцию $u = x - 2y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа

$$\psi = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Точки, подозрительные на условный экстремум, находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ \psi'_z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ -2 + 2\lambda y = 0, \\ 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/(2\lambda), \\ y = 1/\lambda, \\ z = -1/\lambda, \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{I)}\ \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{2}{3}, \quad z_1 = -\frac{2}{3};$$

$$\text{II)}\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = -\frac{2}{3}, \quad z_2 = \frac{2}{3}.$$

$\Rightarrow M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ — стационарные критические точки.

I. Исследуем точку $M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$. Имеем

$$\psi = x - 2y + 2z + \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

$$d\psi = dx - 2dy + 2dz + 3(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

$$d^2\psi = 3\left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right].$$

Из уравнения связи: $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \Rightarrow$ в точке $M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$:

$$-\frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy - \frac{2}{3}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad dx = 2dy - 2dz.$$

А тогда

$$d^2\psi(M_1) = 3\left[4(dy)^2 - 8dydz + 4(dz)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right] =$$

$$= 3\left[5\,(dy)^2 - 8dydz + 5\,(dz)^2\right].$$

В полученной квадратичной форме:

$A = 15, \quad B = -12, \quad C = 15, \quad D = AC - B^2 = 225 - 144 = 81 \ (> 0)$.

Так как $A > 0$ и $D > 0$, то квадратичная форма положительно определенная и, следовательно, $M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ — точка строгого условного минимума; $u_{\min} = u(M_1) = -3$.

II. Исследуем точку $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Имеем в этом случае

$$\psi = x - 2y + 2z - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1);$$

$$d\psi = dx - 2dy + 2dz - 3\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

$$d^2\psi = -3\left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right].$$

Из уравнения связи: $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \Rightarrow$ в точке $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$$\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy + \frac{2}{3}dz = 0 \quad \Rightarrow \quad dx = 2dy - 2dz\,.$$

А тогда

$$d^2\psi(M_2) = -3\left[4(dy)^2 - 8dydz + 4(dz)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right] =$$

$$= -3\left[5\,(dy)^2 - 8dydz + 5\,(dz)^2\right].$$

В полученной квадратичной форме

$$A = -15, \quad B = 12, \quad C = -15, \quad D = AC - B^2 = 81 \ (> 0)\,.$$

Так как $D > 0$, $A < 0$, то квадратичная форма отрицательно определенная, и, следовательно, $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ — точка строгого условного максимума; $u_{\max} = u(M_2) = 3$.

Пример 23. Исследовать на условный экстремум функцию $u = x^m y^n z^p$, если $x + y + z = a$ ($m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $a > 0$).

Решение. Составляем функцию Лагранжа $\psi = x^m y^n z^p + \lambda(x + y + z - a)$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ \psi'_z = 0, \\ x + y + z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^{m-1}y^n z^p + \lambda = 0, \\ nx^m y^{n-1} z^p + \lambda = 0, \\ px^m y^n z^{p-1} + \lambda = 0, \\ x + y + z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{mx^m y^n z^p}{x} + \lambda = 0, \\ \dfrac{nx^m y^n z^p}{y} + \lambda = 0, \\ \dfrac{px^m y^n z^p}{z} + \lambda = 0, \\ x + y + z = a. \end{cases} \qquad (1)$$

При любых вещественных (положительных) m, n, p функция $u(x,y,z)$ определена для $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Исследование будем проводить лишь для $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Из системы (1) находим

$$\frac{\lambda x}{m} = \frac{\lambda y}{n} = \frac{\lambda z}{p}, \qquad x + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}x = a\,.$$

А тогда

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}, \quad z = \frac{pa}{m+n+p},$$

$$\lambda = -\frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p-1}}{(m+n+p)^{m+n+p-1}};$$

$M\left(\frac{ma}{m+n+p}, \frac{na}{m+n+p}, \frac{pa}{m+n+p}\right)$ — стационарная критическая точка. Имеем

$$d\psi = mx^{m-1}y^n z^p dx + nx^m y^{n-1} z^p dy + px^m y^n z^{p-1} dz + \lambda(dx + dy + dz) =$$

$$= x^m y^n z^p \left(\frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy + \frac{p}{z}dz\right) + \lambda(dx + dy + dz);$$

$$d^2\psi = x^m y^n z^p \left(\frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy + \frac{p}{z}dz\right)^2 -$$

$$- x^m y^n z^p \left(\frac{m}{x^2}(dx)^2 + \frac{n}{y^2}(dy)^2 + \frac{p}{z}(dz)^2\right) =$$

$$= x^m y^n z^p \left[\left(\frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy + \frac{p}{z}dz\right)^2 - \frac{m}{x^2}(dx)^2 - \frac{n}{y^2}(dy)^2 - \frac{p}{z^2}(dz)^2\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2\psi(M) = E \cdot \left[\left(\frac{m+n+p}{a}dx + \frac{m+n+p}{a}dy + \frac{m+n+p}{a}dz\right)^2 -\right.$$

$$\left. - \frac{(m+n+p)^2}{ma^2}(dx)^2 - \frac{(m+n+p)^2}{na^2}(dy)^2 - \frac{(m+n+p)^2}{pa^2}(dz)^2\right] =$$

$$= E\frac{(m+n+p)^2}{a^2}\left[(dx + dy + dz)^2 - \frac{1}{m}(dx)^2 - \frac{1}{n}(dy)^2 - \frac{1}{p}(dz)^2\right].$$

Здесь $E = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ — положительное число. Из уравнения связи $dx + dy + dz = 0 \Rightarrow \; dz = -dx - dy$ (это так и в точке M). Поэтому

$$d^2\psi(M) = -E\frac{(m+n+p)^2}{a^2}\left[\frac{1}{m}(dx)^2 + \frac{1}{n}(dy)^2 + \frac{1}{p}(dz)^2\right] =$$

$$-H\left[\frac{m+p}{mp}(dx)^2 + \frac{2}{p}dxdy + \frac{n+p}{np}(dy)^2\right]. \qquad (2)$$

Здесь $H = \frac{(m+n+p)^2}{a^2}(x^m y^n z^p)\Big|_{(\bullet)M} > 0$. Положим $A = -\frac{m+p}{mp}$, $B = -\frac{1}{p}$, $C = -\frac{n+p}{np}$. Тогда $D = AC - B^2 = \frac{m+n+p}{mnp}$ (> 0). Так как $D > 0$, $A < 0$, то квадратичная форма в правой части (2) отрицательно определенная. Следовательно, $M\left(\frac{ma}{m+n+p}, \frac{na}{m+n+p}, \frac{pa}{m+n+p}\right)$ — точка строгого условного максимума; $u_{\max} = u(M) = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

Пример 24. Исследовать на условный экстремум функцию $u = xy^2z^3$, если $x + 2y + 3z = a$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0)$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа $\psi = xy^2z^3 + \lambda(x + 2y + 3z - a)$. Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ \psi'_z = 0, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2z^3 + \lambda = 0, \\ 2xyz^3 + 2\lambda = 0, \\ 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{xy^2z^3}{x} + \lambda = 0, \\ \dfrac{xy^2z^3}{y} + \lambda = 0, \\ \dfrac{xy^2z^3}{z} + \lambda = 0, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda x = \lambda y = \lambda z, \\ \lambda = -y^2z^3, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x,\ z = x, \\ 6x = a, \\ \lambda = -x^5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{6},\ y = \frac{a}{6},\ z = \frac{a}{6},\ \lambda = -\frac{a^5}{6^5} \quad \Rightarrow$$

$M\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ — стационарная критическая точка. Имеем

$$\psi = xy^2z^3 - \frac{a^5}{6^5}(x + 2y + 3z - a);$$

$$d\psi = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz - \frac{a^5}{6^5}(dx + 2dy + 3dz);$$

$$d^2\psi = 2yz^3dydx + 3y^2z^2dzdx + 2yz^3dxdy + 2xz^3(dy)^2 + 6xyz^2dydz +$$
$$+ 3y^2z^2dxdz + 6xyz^2dzdy + 6xy^2z(dz)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2\psi(M) = 4\frac{a^4}{6^4}dxdy + 6\frac{a^4}{6^4}dxdz +$$

$$+ 2\frac{a^4}{6^4}(dy)^2 + 12\frac{a^4}{6^4}dydz + 6\frac{a^4}{6^4}(dz)^2 =$$

$$= 2\frac{a^4}{6^4}\left[2dxdy + 3dxdz + (dy)^2 + 6dydz + 3(dz)^2\right].$$

Из уравнения связи $dx + 2dy + 3dz = 0 \Rightarrow dx = -2dy - 3dz$ (это так и в точке M). Поэтому

$$d^2\psi(M) = \frac{2a^4}{6^4}\left[-3(dy)^2 - 6dydz - 6(dz)^2\right]. \qquad (*)$$

Положим $A = -3$, $B = -3$, $C = -6$. Тогда $D = AC - B^2 = 9$ (> 0). Так как $D > 0$, $A < 0$, то квадратичная форма в (*) отрицательно определенная. Следовательно, $M\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ — точка строгого условного максимума; $u_{\max} = u(M) = \frac{a^6}{6}$.

Пример 25. Исследовать на условный экстремум функцию $u = xy + yz$, если $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2 \end{cases}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа

$$\psi = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2).$$

Стационарные критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ \psi'_z = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ y + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\mu, \\ x = \dfrac{\mu}{2\lambda}, \\ z = \mu + 2, \\ \dfrac{\mu^2}{4\lambda^2} + \mu^2 = 2,. \\ \mu = \dfrac{4\lambda}{4\lambda^2 - 4\lambda - 1}. \end{cases}$$

Определим λ и μ из системы

$$\begin{cases} \mu^2\left(1 + \dfrac{1}{4\lambda^2}\right) = 2, \\ \mu = \dfrac{4\lambda}{4\lambda^2 - 4\lambda - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu^2 = \dfrac{8\lambda^2}{4\lambda^2 + 1}, \\ \mu^2 = \dfrac{16\lambda^2}{(4\lambda^2 - 4\lambda - 1)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\lambda^2}{4\lambda^2 + 1} = \frac{16\lambda^2}{(4\lambda^2 - 4\lambda - 1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (4\lambda^2 - 4\lambda - 1)^2 = 8\lambda^2 + 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 16\lambda^4 + 16\lambda^2 + 1 - 32\lambda^3 - 8\lambda^2 + 8\lambda = 8\lambda^2 + 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 16\lambda^4 - 32\lambda^3 + 8\lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (16\lambda^4 - 32\lambda^3 + 16\lambda^2) - (16\lambda^2 - 8\lambda + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2(16\lambda^2 - 32\lambda + 16) - (16\lambda^2 - 8\lambda + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\lambda(4\lambda - 4)\right]^2 - (4\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\lambda(4\lambda - 4) + (4\lambda - 1)\right] \cdot \left[\lambda(4\lambda - 4) - (4\lambda - 1)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (4\lambda^2 - 1)(4\lambda^2 - 8\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_4 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

А тогда

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = -1, \quad \mu_3 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}, \quad \mu_4 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2 - 2\sqrt{3}}.$$

1) Пусть $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = -1$. Тогда $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 1$. Не подходит. У нас по условию должно быть $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

2) Пусть $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\mu_2 = -1$. Тогда $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $z_2 = 1$. Подходит.

3) Пусть $\lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu_3 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$. Не подходит, так как $\mu_3 > 0$, а следовательно, $y_3 < 0$.

4) Пусть $\lambda_4 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu_4 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2 - 2\sqrt{3}}$. Не подходит, так как $\lambda_3 > 0$, $\mu_3 < 0$ и, следовательно, $x_4 < 0$.

Таким образом, у нас $M_2(1,1,1)$ — единственная критическая точка ($\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\mu_2 = -1$). Исследуем ее. Имеем

$$\psi = xy + yz - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2) - (y + z - 2);$$

$$d\psi = y\,dx + x\,dy + z\,dy + y\,dz - x\,dx - y\,dy - dy - dz;$$

$$d^2\psi = dxdy + dxdy + dydz + dydz - (dx)^2 - (dy)^2 \quad \Rightarrow$$

в частности,

$$d^2\psi(M_2) = -(dx)^2 - (dy)^2 + 2dxdy + 2dydz.$$

Из уравнений связи

$$\begin{cases} x\,dx + y\,dy = 0, \\ dy + dz = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\text{в точке } M_2\text{:} \quad \begin{cases} dx + dy = 0, \\ dy + dz = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dx = -dy, \; dz = -dy.$$

Значит, $d^2\psi(M_2) = -(dy)^2 - (dy)^2 - 2(dy)^2 - 2(dy)^2 = -6\,(dy)^2$ — отрицательно определенная квадратичная форма и, следовательно, $M_2(1,1,1)$ — точка строгого условного максимума. $u_{\max} = u(M_2) = 2$.

§5. Примеры и задачи на наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в области $(\overline{D}) = \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le x + y \le 1. \end{cases}$

Решение. Функция $z = x - 2y - 3$ непрерывна в $(\overline{D})$, причем $(\overline{D})$ — ограниченное замкнутое множество. Поэтому $z(x,y)$ достигает в $(\overline{D})$ своих наибольшего и наименьшего значений. Ясно, что наибольшее и наименьшее значения функции $z(x,y)$ могут достигаться либо в точках возможного экстремума в области (D), либо в точках контура области (D).

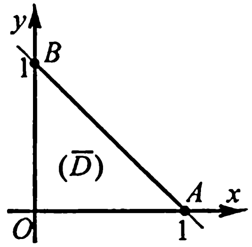


Рис. 4.6

Так как $z'_x = 1$ $(\ne 0)$ и $z'_y = -2$ $(\ne 0)$, то внутри области (D) нет точек, подозрительных на экстремум. Значит, наименьшее и наибольшее значения функции достигаются на контуре области (D). Поэтому исследуем функцию $z(x,y)$ в точках контура.

1) OA: $y = 0$, $0 < x < 1$. На OA $z = x - 3 \Rightarrow z'_x = 1$ ($\ne 0$, для $x \in (0,1)$).

2) OB: $x = 0$, $0 < y < 1$. На OB $z = -2y - 3 \Rightarrow z'_y = -2$ ($\ne 0$ для $y \in (0,1)$).

3) AB: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$, $x \in (0,1)$.

На AB $z = x - 2(1-x) - 3 = 3x - 5 \Rightarrow z'_x = 3$ ($\ne 0$ для $x \in (0,1)$).

Остаются точки стыка линий, образующих контур области (D). Это — точки $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $B(0,1)$. Имеем: $z(0,0) = -3$, $z(1,0) = -2$, $z(0,1) = -5$.

Вывод. Наибольшее значение функции $z(x,y)$ в $(\overline{D})$ равно -2. Наименьшее значение функции $z(x,y)$ в $(\overline{D})$ равно -5.

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в области $(\overline{D})$: $x^2 + y^2 \le 25$.

Решение. Имеем $z'_x = 2x - 12$, $z'_y = 2y + 16$. Из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = 0, \\ y + 8 = 0 \end{cases}$$

находим $x = 6$, $y = -8$. Видим, что точка $(6, -\infty) \notin (D)$. Значит, заданная функция $z(x, y)$ достигает своего наименьшего и наибольшего значений на контуре области (D), т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 25$. Таким образом, приходим к задаче: исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $x^2 + y^2 = 25$.

Составляем функцию Лагранжа: $\psi = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$. Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 12 + 2\lambda x = 0, \\ 2y + 16 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 3, & x_2 = -3, \\ y_1 = -4, & y_2 = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow M_1(3, -4)$ и $M_2(-3, 4)$ — точки возможного условного экстремума. Заметим, что нет нужды выяснять, что в этих точках — максимум или минимум. Нужно только найти значения функции z в этих точках и сравнить их. Имеем

$$z(M_1) = z(3, -4) = -75; \quad z(M_2) = z(-3, 4) = 125.$$

Вывод. Наименьшее значение функции $z(x, y)$ в $(\overline{D})$ равно -75. Наибольшее значение функции $z(x, y)$ в $(\overline{D})$ равно 125.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2$ в области $(\overline{D})$: $|x| + |y| \le 1$.

Решение. Имеем $z'_x = 2x - y$, $z'_y = 2y - x$. Из системы

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = 0, \ y_1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow M_1(0, 0)$ — стационарная критическая для функции $z(x, y)$. Отметим, что $M_1(0, 0) \in (D)$. Исследуем $z(x, y)$ в точках контура области (D). Контур (D) состоит из четырех прямолинейных отрезков:

1) AB: $y = 1 - x$, $x \in (0, 1)$;

2) BC: $y = 1 + x$, $x \in (-1, 0)$;

3) CD: $y = -1 - x$, $x \in (-1, 0)$;

4) DA: $y = -1 + x$, $x \in (0, 1)$.

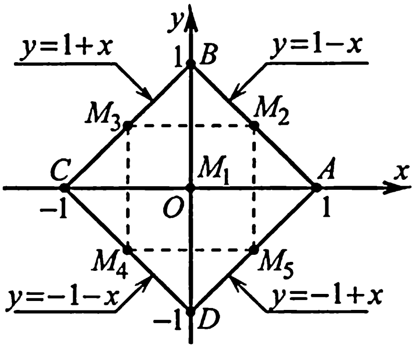


Рис. 4.7

1) На AB:

$$z = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = $$

$$= 3x^2 - 3x + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_x = 6x - 3 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow z'_x = 0$ при $x = \dfrac{1}{2}$ $(\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}) \Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ — точка возможного условного экстремума.

2) На BC:

$$z = x^2 - x(1+x) + (1+x)^2 = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad z'_x = 2x + 1 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow z'_x = 0$ при $x = -\dfrac{1}{2}$ $(\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}) \Rightarrow M_3\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ — точка возможного условного экстремума.

3) На CD:

$$z = x^2 + x(1+x) + (1+x)^2 = 3x^2 + 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad z'_x = 6x + 3 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow z'_x = 0$ при $x = -\dfrac{1}{2}$ $(\Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}) \Rightarrow M_4\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ — точка возможного условного экстремума.

4) На DA:

$$z = x^2 - x(x-1) + (x-1)^2 = x^2 - x + 1 \quad \Rightarrow \quad z'_x = 2x - 1 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow z'_x = 0$ при $x = \dfrac{1}{2}$ $(\Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}) \Rightarrow M_5\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ — точка возможного условного экстремума.

Нужно вычислить еще значения функции $z(x,y)$ в точках стыковки линий, образующих контур области (D), т. е. в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$. Итак, имеем: 1) $z(M_1) = z(0,0) = 0$;

2) $z(M_2)=z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$; 3) $z(M_3)=z\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$;

4) $z(M_4)=z\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$; 5) $z(M_5)=z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$;

6) $z(A)=z(1,0)=1$; 7) $z(B)=z(0,1)=1$;

8) $z(C)=z(-1,0)=1$; 9) $z(D)=z(0,-1)=1$.

Вывод. Наименьшее значение функции $z(x,y)$ в $(\overline{D})$ равно 0. Наибольшее значение функции $z(x,y)$ в $(\overline{D})$ равно 1.

Пример 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $u=x^2+2y^2+3z^2$ в области $(\overline{D})$: $x^2+y^2+z^2\le 100$.

Решение. Имеем $u'_x=2x$, $u'_y=4y$, $u'_z=6z$. Из системы

$$\begin{cases} u'_x=0, \\ u'_y=0, \\ u'_z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ 4y=0, \\ 6z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка $M_0(0,0,0)$ — стационарная критическая точка для функции $u(x,y,z)$. Отметим, что точка $M_0\in(D)$. Исследуем $u(x,y,z)$ в точках границы области (D), т. е. в точках сферы $x^2+y^2+z^2=100$. Таким образом, получаем задачу: исследовать на условный экстремум функцию $u=x^2+2y^2+3z^2$, если $x^2+y^2+z^2=100$. Составляем функцию Лагранжа

$$\psi=x^2+2y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-100).$$

Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x=0, \\ \psi'_y=0, \\ \psi'_z=0, \\ x^2+y^2+z^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2\lambda x=0, \\ 4y+2\lambda y=0, \\ 6z+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_1=-1, & \lambda_2=-2, & \lambda_3=-3; \\ x_1=\pm 10, & x_2=0, & x_3=0; \\ y_1=0, & y_2=\pm 10, & y_3=0; \\ z_1=0, & z_2=0, & z_3=\pm 10 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $M_1(\pm 10, 0, 0)$, $M_2(0, \pm 10, 0)$, $M_3(0, 0, \pm 10)$ — точки возможного условного экстремума. Находим значения функции $u(x,y,z)$ в точках M_0, M_1, M_2, M_3. Имеем

$$u(M_0) = u(0,0,0) = 0, \quad u(M_1) = u(\pm 10, 0, 0) = 100,$$
$$u(M_2) = u(0, \pm 10, 0) = 200, \quad u(M_3) = u(0, 0, \pm 10) = 300.$$

Вывод. Наименьшее значение функции $u(x,y,z)$ в $(\overline{D})$ равно 0. Наибольшее значение функции $u(x,y,z)$ в $(\overline{D})$ равно 300.

Пример 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $u = x + y + z$ в области $(\overline{D})$: $x^2 + y^2 \le z \le 1$.

Решение. Так как $u'_x = 1$, $u'_y = 1$, $u'_z = 1$, то внутри области (D) нет точек, подозрительных на экстремум. Значит, наименьшее и наибольшее значения функции $u(x,y,z)$ достигаются на границе области (D), т. е. либо на поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ $(0 \le z < 1)$, либо на основании параболоида $z = 1$, $x^2 + y^2 \le 1$.

1) Исследуем функцию $u(x,y,z)$ на боковой поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$ $(0 < z < 1)$. Имеем задачу: исследовать на экстремум функцию $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 - z = 0$ $(0 < z < 1)$.

Составляем функцию Лагранжа $\psi = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z)$. Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ \psi'_z = 0, \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + 2\lambda y = 0, \\ 1 - \lambda = 0, \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 1, \\ x = -1/2, \\ y = -1/2, \\ z = 1/2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\widetilde{M}\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ — точка, подозрительная на условный экстремум.

2) Исследуем функцию $u(x,y,z)$ на основании параболоида $z = 1$, $x^2 + y^2 < 1$. Имеем $u = x + y + 1$ $\Rightarrow$ $u'_x = 1$, $u'_y = 1$. Значит, среди точек основания параболоида $z = 1$, $x^2 + y^2 < 1$ нет критических точек.

3) Исследуем функцию $u(x,y,z)$ на стыке боковой поверхности параболоида с основанием параболоида. Получаем задачу: исследовать на экстремум функцию $u = x + y + 1$, где $x^2 + y^2 = 1$.

Составляем функцию Лагранжа $\psi = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc} x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & x_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & x_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & y_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & y_4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ (z_1 = 1) & (z_2 = 1) & (z_3 = 1) & (z_4 = 1) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right),$$

$M_4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ — точки возможного условного экстремума.

4) Нужно вычислить еще значение функции $u(x,y,z)$ в точке $O(0, 0, 0)$. Итак, имеем:

1) $u(\tilde{M}) = u\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$; 2) $u(M_1) = u\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 1 - \sqrt{2}$;

3) $u(M_2) = u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$; 4) $u(M_3) = u\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 1$;

5) $u(M_4) = u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 1$; 6) $u(0, 0, 0) = 0$.

Вывод. Наименьшее значение функции $u(x,y,z)$ в $(\overline{D})$ равно $-\dfrac{1}{2}$. Наибольшее значение функции $u(x,y,z)$ в $(\overline{D})$ равно $1 + \sqrt{2}$.

Пример 6. Выяснить, при каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность.

Решение. Обозначим через x — длину, y — ширину, z — высоту ванны. (По смыслу задачи ясно, что: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.) Тогда площадь S поверхности ванны определится формулой

$$S = xy + 2xz + 2yz.$$

По условию: $xyz = V$ (V— заданная постоянная величина) $\Rightarrow$ $xz = \frac{V}{y}$, $yz = \frac{V}{x}$. Следовательно,

$$S = xy + 2\frac{V}{y} + 2\frac{V}{x}. \qquad (*)$$

Имеем $S'_x = y - 2\frac{V}{x^2}$, $S'_y = x - 2\frac{V}{y^2}$. Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} S'_x = 0, \\ S'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2\frac{V}{x^2} = 0, \\ x - 2\frac{V}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = 2V, \\ xy^2 = 2V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = xy^2 \\ x^2y = 2V \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x-y) = 0, \\ x^2y = 2V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2y = 2V \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V},\ y = \sqrt[3]{2V} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ — единственная критическая точка функции (*).

Имеем, далее, $S''_{x^2} = 4\frac{V}{x^3}$, $S''_{xy} = 1$, $S''_{y^2} = 4\frac{V}{y^3}$. В точке $M\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$

$$A = \frac{4V}{2V} = 2, \quad B = 1, \quad C = \frac{4V}{2V} = 2, \quad D = AC - B^2 = 3 \ (> 0).$$

Так как $D > 0$, $A > 0$, то $M\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ — точка строгого минимума. У нас $z = \frac{V}{xy} \Rightarrow z(M) = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

Ответ. Площадь поверхности ванны будет наименьшей, когда $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$; $S_{\text{наим}} = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

Пример 7. Данное положительное число a разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма обратных величин их была наименьшей.

Решение. Обозначим сомножители через $x_1, x_2, \dots, x_n$, так что $a = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$. Тогда сумма обратных величин этих сомножителей $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет такой:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}. \qquad (*)$$

Составляем функцию Лагранжа $\psi = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \lambda(x_1 x_2 \dots x_n - a)$. Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_{x_1} = 0, \\ \psi'_{x_2} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi'_{x_n} = 0, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x_1^2} + \lambda x_2 x_3 \dots x_n = 0, \\ -\dfrac{1}{x_2^2} + \lambda x_1 x_3 \dots x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -\dfrac{1}{x_n^2} + \lambda x_1 x_2 \dots x_{n-1} = 0, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{\lambda a}{x_1} = 0, \\ -\dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{\lambda a}{x_2} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -\dfrac{1}{x_n^2} + \dfrac{\lambda a}{x_n} = 0, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/x_1 = \lambda a, \\ 1/x_2 = \lambda a, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1/x_n = \lambda a, \\ a = x_1 x_2 \dots x_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dfrac{1}{\lambda a}, \\ x_1 x_2 \dots x_n = a \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = \dfrac{1}{a \cdot a^{1/n}}, \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n = a^{1/n} \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow M(a^{1/n}, a^{1/n}, \dots, a^{1/n})$ — стационарная критическая точка. Имеем

$$\psi''_{x_i^2} = \frac{2}{x_i^3} \quad (i = \overline{1, n}); \qquad \psi''_{x_i x_k} = 0 \quad (i \neq k) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \psi''_{x_i^2}(M) = \frac{2}{a^{3/n}}, \quad \psi''_{x_i x_k}(M) = 0 \quad (i \neq k).$$

А тогда $d^2\psi(M) = \frac{2}{a^{3/n}}\left[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \ldots + (dx_n)^2\right]$. Из уравнения связи

$$x_2 x_3 \ldots x_n\, dx_1 + x_1 x_3 \ldots x_n\, dx_2 + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-1}\, dx_n = 0.$$

Следовательно, в точке M

$$a^{\frac{n-1}{n}}(dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad dx_n = -(dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_{n-1}).$$

А тогда

$$d^2\psi(M) = \frac{2}{a^{3/n}}\left[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \ldots + (dx_{n-1})^2 + (dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_{n-1})^2\right] =$$

$$= \frac{2}{a^{3/n}}\left[2(dx_1)^2 + 2(dx_2)^2 + \ldots + 2(dx_{n-1})^2 + 2dx_1 dx_2 + 2dx_1 dx_3 + \ldots + \right.$$

$$\left. + 2dx_1 dx_{n-1} + 2dx_2 dx_3 + \ldots + 2dx_2 dx_{n-1} + \ldots + 2dx_{n-2} dx_{n-1}\right] \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ видим, что $d^2\psi(M)$ — положительно определенная квадратичная форма, ибо

$$a_{11} = 2 \;\; (> 0), \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \;\; (> 0),$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \;\; (> 0), \; \ldots \; ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{vmatrix} = n \;\; (> 0).$$

Значит, $M(a^{1/n}, a^{1/n}, \ldots, a^{1/n})$ — точка строгого условного минимума. Следовательно, функция (*) в точке $M(a^{1/n}, a^{1/n}, \ldots, a^{1/n})$ имеет наименьшее значение; $u_{\text{наим}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a}}$.

Пример 8. На плоскости даны n материальных точек $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $\cdots$, $P_n(x_n,y_n)$ с массами соответственно равными m_1, m_2, ..., m_n. При каком положении точки $P(x,y)$ момент инерции системы относительно этой точки будет наименьшим?

Решение. Момент инерции системы относительно точки $P(x,y)$ определяется формулой

$$I(x,y) = m_1\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]+m_2\left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\right]+\ldots+$$
$$+m_n\left[(x-x_n)^2+(y-y_n)^2\right].$$

Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} I'_x = 0, \\ I'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\left[m_1(x-x_1)+m_2(x-x_2)+\ldots+m_n(x-x_n)\right]=0, \\ 2\left[m_1(y-y_1)+m_2(y-y_2)+\ldots+m_n(y-y_n)\right]=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \quad (*)$$

Точка $M(x,y)$, у которой x и y выражаются по формулам (*), является стационарной критической для функции $I(x,y)$. Имеем, далее, $I''_{x^2} = 2(m_1+m_2+\ldots+m_n)$, $I''_{xy}=0$, $I''_{y^2} = 2(m_1+m_2+\ldots+m_n)$ (это так и в точке M);

$$A = I''_{x^2} = 2(m_1+m_2+\ldots+m_n) > 0; \quad B = I''_{xy}(M) = 0,$$
$$C = I''_{y^2} = 2(m_1+m_2+\ldots+m_n),$$
$$D = AC - B^2 = 4(m_1+m_2+\ldots+m_n)^2 > 0.$$

Так как $D>0$ и $A>0$, то $I(x,y)$ в точке M имеет строгий минимум.

Ответ. Точка $P(x,y)$, относительно которой момент инерции системы принимает наименьшее значение, имеет координаты

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Пример 9. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

Решение. Расстояние ρ от точки (x,y), лежащей на параболе $y = x^2$, до прямой $x - y - 2 = 0$ определяется формулой

$$\rho = -\frac{x - y - 2}{\sqrt{2}}, \quad \text{где} \quad y = x^2.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $\rho(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y - 2)$, если $y = x^2$. Составляем функцию Лагранжа

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y - 2) + \lambda(y - x^2).$$

Критические точки находим из системы

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\lambda x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda = 0, \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ — стационарная критическая точка. Имеем

$$\psi''_{x^2} = -2\lambda \quad \Rightarrow \quad \psi''_{x^2}(M) = \sqrt{2}, \quad \psi''_{xy} = 0, \quad \psi''_{y^2} = 0.$$

Следовательно, $d^2\psi(M) = \sqrt{2} \cdot (dx)^2$ — положительно определенная квадратичная форма. Значит, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ — точка строгого условного минимума; $\rho_{\min} = \rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4\sqrt{2}}$.

§6. Примеры и задачи на замену переменных

Пример 1. Преобразовать уравнение $y'_x y'''_{x^3} - 3(y''_{x^2})^2 = x$, приняв y за новую независимую переменную.

Решение. $y = y(x) \quad \leftrightarrow \quad x = x(y)$. Имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}; \quad y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \left(\frac{1}{x'_y}\right)'_y \cdot y'_x = -\frac{x''_{y^2}}{(x'_y)^2} \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{x''_{y^2}}{(x'_y)^3};$$

$$y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x = \left(-\frac{x''_{y^2}}{(x'_y)^3}\right)'_y \cdot y'_x = \left(-\frac{x''_{y^2}}{(x'_y)^3}\right)'_y \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{x'''_{y^3} x'_y - 3(x''_{y^2})^2}{(x'_y)^5}.$$

Подставляя найденные выражения для y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} в заданное уравнение, получим

$$\frac{1}{x'_y} \cdot \left(\frac{3(x''_{y^2})^2 - x'''_{y^3} x'_y}{(x'_y)^5}\right) - \frac{3(x''_{y^2})^2}{(x'_y)^6} = x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x'''_{y^3} \cdot x'_y}{(x'_y)^6} = x \quad \Rightarrow \quad x'''_{y^3} + x(x'_y)^5 = 0.$$

Пример 2. Преобразовать уравнение $y''_{x^2} + \frac{2}{x} y'_x + y = 0$, приняв x за функцию, а $t = xy$ за независимую переменную.

Решение. $y = y(x) \quad \leftrightarrow \quad x = x(t)$. Имеем

$$y = \frac{t}{x} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{t'_x \cdot x - t}{x^2} \quad \left(= \frac{1}{x \cdot x'_t} - \frac{t}{x^2}\right);$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \left(\frac{t'_x x - t}{x^2}\right)'_x = \frac{(t''_{x^2} x + t'_x - t'_x) x^2 - 2x(t'_x x - t)}{x^4} =$$

$$= \frac{t''_{x^2}}{x} - 2\frac{t'_x}{x^2} + 2\frac{t}{x^3}.$$

Имеем, далее,

$$x'_t = \frac{1}{t'_x} \quad \Rightarrow \quad t'_x = \frac{1}{x'_t}; \quad t''_{x^2} = (t'_x)'_x = \left(\frac{1}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{1}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x =$$

$$= -\frac{x''_{t^2}}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{x''_{t^2}}{(x'_t)^3}.$$

А тогда

$$y''_{x^2} = -\frac{x''_{t^2}}{x\,(x'_t)^3} - \frac{2}{x^2 x'_t} + \frac{2t}{x^3}.$$

Подставляя найденные выражения для y'_x и y''_{x^2} в заданное уравнение, получим

$$-\frac{x''_{t^2}}{x\,(x'_t)^3} - \frac{2}{x^2 x'_t} + \frac{2t}{x^3} + \frac{2}{x^2 x'_t} - \frac{2t}{x^3} + \frac{t}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x''_{t^2} - t\,(x'_t)^3 = 0.$$

Пример 3. Преобразовать уравнение $x^2 y''_{x^2} + x y'_x + y = 0$, если $x = e^t$.

Решение. $y = y(x) \;\leftrightarrow\; y = y(t)$. Имеем $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Но $t'_x = \dfrac{1}{x'_t} =$ $= \dfrac{1}{e^t} = e^{-t}$. Поэтому $y'_x = y'_t e^{-t}$;

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_t e^{-t})'_x = (y'_t e^{-t})'_t \cdot t'_x = (y'_t e^{-t})'_t \cdot e^{-t} =$$

$$= (y''_{t^2} e^{-t} - y'_t e^{-t}) \cdot e^{-t} \quad \Rightarrow \quad y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)\, e^{-2t}.$$

Подставляя в заданное уравнение найденные выражения для y'_x и y''_{x^2}, получим

$$e^{2t}(y''_{t^2} - y'_t)\, e^{-2t} + e^t y'_t e^{-t} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y''_{t^2} + y = 0.$$

Пример 4. Преобразовать уравнение $y''_{x^2} + p\,(x) y'_x + q(x) y = 0$, если $y = u \cdot e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}$, где $u\,(x)$ — новая функция.

Решение. Имеем

$$y'_x = u'_x e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} + u \cdot e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\,p\,(x)\right) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} \left[u'_x - \frac{1}{2}\,u \cdot p(x)\right];$$

$$y''_{x^2}=e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)\,d\xi}\cdot\left(-\frac{1}{2}p(x)\right)\left[u'_x-\frac{1}{2}u\cdot p(x)\right]+$$

$$+e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)\,d\xi}\cdot\left[u''_{x^2}-\frac{1}{2}u'_xp(x)-\frac{1}{2}up'(x)\right]=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)\,d\xi}\left[-\frac{1}{2}u'_xp(x)+\frac{1}{4}up^2(x)+u''_{x^2}-\frac{1}{2}u'_xp(x)-\frac{1}{2}up'(x)\right].$$

Подставляя полученные выражения для y'_x, y''_{x^2} в заданное уравнение, получим

$$e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)\,d\xi}\left[-u'_xp(x)+\frac{1}{4}up^2(x)+u''_{x^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}up'(x)+p(x)u'_x-\frac{1}{2}up^2(x)+u\,q(x)\right]=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad u''_{x^2}+u\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]=0.$$

Пример 5. Преобразовать уравнение $x^4y''_{x^2}+xyy'_x-2y^2=0$, если $x=e^t$, $y=u\,e^{2t}$ (t — новая независимая переменная, $u(t)$ — новая неизвестная функция).

Решение. Имеем $x'_t=e^t \;\Rightarrow\; t'_x=\dfrac{1}{x'_t}=e^{-t}$;

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x=(ue^{2t})'_t\cdot e^{-t}=(u'_t+2u)\,e^{2t}\cdot e^{-t}=(u'_t+2u)\,e^t.$$

$$y''_{x^2}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x=\left[(u'_t+2u)\,e^t\right]'_t\cdot e^{-t}=$$

$$=\left[u''_{t^2}+2u'_t+u'_t+2u\right]e^t\cdot e^{-t}=u''_{t^2}+3u'_t+2u.$$

Подставляя найденные выражения для y'_x, y''_{x^2} и принимая во внимание, что $x=e^t$, $y=ue^{2t}$, получим

$$e^{4t}(u''_{t^2}+3u'_t+2u)+e^{3t}u\,(u'_t+2u)\,e^t-2u^2e^{4t}=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u''_{t^2} + 3u'_t + 2u + uu'_t = 0 \quad \Rightarrow \quad u''_{t^2} + (3+u)\,u'_t + 2u = 0\,.$$

Пример 6. Преобразовать уравнение $(1-x^2)^2 y''_{x^2} = -y$, если $x = \operatorname{th} t$, $y = \dfrac{u}{\operatorname{ch} t}$ (t — новая независимая переменная, $u(t)$ — новая неизвестная функция).

Решение. Имеем $x'_t = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \quad \Rightarrow \quad t'_x = \dfrac{1}{x'_t} = \operatorname{ch}^2 t$;

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \left(\frac{u}{\operatorname{ch} t}\right)'_t \cdot \operatorname{ch}^2 t = u'_t \cdot \operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t\,;$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (u'_t \operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t)'_t \cdot \operatorname{ch}^2 t =$$

$$= (u''_{t^2} \operatorname{ch} t + u'_t \operatorname{sh} t - u'_t \operatorname{sh} t - u \operatorname{ch} t) \cdot \operatorname{ch}^2 t \quad \Rightarrow \quad y''_{x^2} = (u''_{t^2} - u)\operatorname{ch}^3 t.$$

Имеем, далее, $(1-x^2)^2 = (1-\operatorname{th}^2 t)^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^4 t}$. Исходное уравнение станет таким:

$$\frac{u''_{t^2} - u}{\operatorname{ch} t} = -\frac{u}{\operatorname{ch} t} \quad \Rightarrow \quad u''_{t^2} = 0\,.$$

Пример 7. Преобразовать к полярным координатам r и φ уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Решение. $dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$, $dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{\sin\varphi \dfrac{dr}{d\varphi} + r\cos\varphi}{\cos\varphi \dfrac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi}.$$

Исходное уравнение примет вид

$$\frac{\sin\varphi \cdot r'_\varphi + r\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot r'_\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)\, r'_\varphi + r\cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi) =$$

$$= \cos\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi)\, r'_\varphi - r\sin\varphi(\cos\varphi + \sin\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r'_\varphi(\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) =$$

$$= -r(\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad r'_\varphi = r\,.$$

Пример 8. Преобразовать к полярным координатам r и φ уравнение $(x^2+y^2)^2 y''_{x^2} = (x + yy'_x)^3$, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Решение. $y = y(x) \;\leftrightarrow\; r = r(\varphi)$. Имеем

$$y'_x = y'_\varphi \cdot \varphi'_x = y'_\varphi \cdot \frac{1}{x'_\varphi} = \frac{\sin\varphi \cdot r'_\varphi + r\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot r'_\varphi - r\sin\varphi}\,,$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_\varphi \cdot \varphi'_x = (y'_x)'_\varphi \cdot \frac{1}{x'_\varphi} =$$

$$= \left(\frac{\sin\varphi \cdot r'_\varphi + r\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot r'_\varphi - r\sin\varphi}\right)'_\varphi \cdot \frac{1}{\cos\varphi \cdot r'_\varphi - r\sin\varphi} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y''_{x^2} = \frac{r^2 - rr''_{\varphi^2} + 2(r'_\varphi)^2}{(\cos\varphi \cdot r'_\varphi - r\sin\varphi)^3}\,.$$

Исходное уравнение станет таким:

$$r^4 \cdot \frac{r^2 - rr''_{\varphi^2} + 2(r'_\varphi)^2}{(\cos\varphi \cdot r'_\varphi - r\sin\varphi)^3} = \left(r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot \frac{\sin\varphi \cdot r'_\varphi + r\cos\varphi}{\cos\varphi \cdot r'_\varphi - r\sin\varphi}\right)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r\left(r^2 - rr''_{\varphi^2} + 2(r'_\varphi)^2\right) =$$

$$= (r'_\varphi\cos^2\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi + r'_\varphi\sin^2\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r\left[r^2 - rr''_{\varphi^2} + 2(r'_\varphi)^2\right] = (r'_\varphi)^3\,.$$

Пример 9. Перейти к полярным координатам r и φ в системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + kx(x^2+y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ky(x^2+y^2), \end{cases}$$

полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Решение. Имеем

$$x_t' = r_t'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi_t',$$
$$y_t' = r_t'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi_t'.$$

Исходная система станет такой:

$$\begin{cases} r_t'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi_t' = r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi, \\ r_t'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi_t' = -r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi. \end{cases} \qquad (*)$$

Умножим обе части первого уравнения (*) на $\cos\varphi$, а обе части второго — на $\sin\varphi$, и сложим. Получим $r_t' = kr^3$. Умножим обе части первого уравнения (*) на $(-\sin\varphi)$, а обе части второго на $\cos\varphi$. Получим: $r\cdot\varphi_t' = -r \Rightarrow \varphi_t' = -1$. Таким образом, в полярных координатах r и φ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = kr^3, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -1. \end{cases}$$

Пример 10. Преобразовать выражение $W = x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}$, вводя новые функции $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Решение. По условию

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad r^2\frac{d\varphi}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Дифференцируя по t обе части полученного равенства, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Следовательно, $W = \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{dt}\right)$.

Пример 11. В преобразовании Лежандра каждой точке (x,y) кривой $y = y(x)$ ставится в соответствие точка (X,Y), где $X = y'_x$, $Y = xy'_x - y$. Найти Y'_X, Y''_{X^2}, Y'''_{X^3}.

Решение. $y = y(x) \leftrightarrow Y = Y(X)$. Имеем:

1) $Y'_X = Y'_x \cdot x'_X = \dfrac{Y'_x}{X'_x} = \dfrac{y'_x + xy''_{x^2} - y'_x}{y''_{x^2}} = x$.

2) $Y''_{X^2} = (Y'_X)'_X = (Y'_X)'_x \cdot x'_X = (Y'_X)'_x \cdot \dfrac{1}{X'_x} = 1 \cdot \dfrac{1}{y''_{x^2}} = \dfrac{1}{y''_{x^2}}$.

3) $Y'''_{X^3} = (Y''_{X^2})'_X = (Y''_{X^2})'_x \cdot \dfrac{1}{X'_x} = \left(\dfrac{1}{y''_{x^2}}\right)'_x \cdot \dfrac{1}{y''_{x^2}} = -\dfrac{y'''_{x^3}}{(y''_{x^2})^3}$.

Пример 12. Решить уравнение $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, приняв за новые независимые переменные $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Решение. $z = z(x,y) \leftrightarrow z = z(\xi,\eta)$. Имеем

$$z'_x = z'_\xi \cdot \xi'_x + z'_\eta \cdot \eta'_x = z'_\xi + z'_\eta, \quad z'_y = z'_\xi \cdot \xi'_y + z'_\eta \cdot \eta'_y = z'_\xi - z'_\eta.$$

Исходное уравнение станет таким:

$$z'_\xi + z'_\eta = z'_\xi - z'_\eta \quad \Rightarrow \quad z'_\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z(\xi,\eta) = \varphi(\xi),$$

т. е. $z = \varphi(x + y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция.

Пример 13. Решить уравнение $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ $(a \neq 0)$, если $\xi = x$ и $\eta = y - bz$.

Решение. $z = z(x,y) \leftrightarrow z = z(\xi,\eta)$. Имеем

$$z'_x = z'_\xi \cdot \xi'_x + z'_\eta \cdot \eta'_x = z'_\xi + z'_\eta(-bz'_x) \quad \Rightarrow \quad z'_x = \frac{z'_\xi}{1 + bz'_\eta};$$

$$z'_y = z'_\xi \cdot \xi'_y + z'_\eta \cdot \eta'_y = 0 + z'_\eta(1 - bz'_y) \quad \Rightarrow \quad z'_y = \frac{z'_\eta}{1 + bz'_\eta}.$$

Исходное уравнение станет таким:

$$\frac{az'_\xi}{1 + bz'_\eta} + \frac{bz'_\eta}{1 + bz'_\eta} = 1 \quad \Rightarrow \quad az'_\xi + bz'_\eta = 1 + bz'_\eta \quad \Rightarrow \quad az'_\xi = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_\xi = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{a}\xi + \varphi(\eta) \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz),$$

где φ — произвольная дифференцируемая функция.

Пример 14. Преобразовать уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\,\frac{\partial z}{\partial y} = xy$, если $u = \ln x$, $v = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ (u и v — новые независимые переменные).

Решение. $z = z(x,y) \;\leftrightarrow\; z = z(u,v)$. Имеем

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot \frac{1}{x} + 0,$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = 0 + z'_v \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Из соотношения $u = \ln x \;\Rightarrow\; x = e^u$. Из соотношения $v = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y + \sqrt{1+y^2} = e^v \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+y^2} = e^v - y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 + y^2 = e^{2v} - 2ye^v + y^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{e^{2v} - 1}{2e^v} = \frac{e^v - e^{-v}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{sh} v.$$

Исходное уравнение станет таким: $z'_u + z'_v = e^u \operatorname{sh} v$.

Пример 15. Преобразовать уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, если $u = \frac{y}{x}$, $v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (u и v — новые независимые переменные).

Решение. $z = z(x,y) \;\leftrightarrow\; z = z(u,v)$. Имеем

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + z'_v\left(z'_x + \frac{x + zz'_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_x = \frac{\dfrac{x}{v-z}z'_v - \dfrac{y}{x^2}z'_u}{1 - z'_v\dfrac{v}{v-z}} \quad \Rightarrow \quad xz'_x = \frac{x^2 z'_v - u(v-z)z'_u}{v - z - vz'_v};$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot \frac{1}{x} + z'_v\left(z'_y + \frac{y + zz'_y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_y = \frac{\dfrac{y}{v-z}z'_v + \dfrac{1}{x}z'_u}{1 - z'_v\dfrac{v}{v-z}} \quad \Rightarrow \quad yz'_y = \frac{y^2 z'_v + u(v-z)z'_u}{v - z - vz'_v}.$$

Исходное уравнение станет таким:

$$\frac{(x^2+y^2)z'_v}{v-z-vz'_v} = v \quad \Rightarrow \quad (x^2+y^2)\,z'_v = v(v-z) - v^2 z'_v.$$

Из соотношения $v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (v-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = v^2 - 2vz.$$

А тогда предыдущее соотношение примет вид

$$(v^2 - 2vz)z'_v + v^2 z'_v = v(v-z) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2v(v-z)z'_v = v(v-z) \quad \Rightarrow \quad z'_v = \frac{1}{2}.$$

Пример 16. Преобразовать уравнение $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ $= x + y + z$, если $u = x + z$, $v = y + z$ (u и v — новые независимые переменные).

Решение. $z = z(x,y) \;\leftrightarrow\; z = z(u,v)$. Имеем

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u(1 + z'_x) + z'_v \cdot z'_x \quad \Rightarrow \quad z'_x = \frac{z'_u}{1 - z'_u - z'_v};$$

$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = z'_u \cdot z'_y + z'_v(1 + z'_y) \quad \Rightarrow \quad z'_y = \frac{z'_v}{1 - z'_u - z'_v}.$$

Исходное уравнения станет таким:

$$u\frac{z'_u}{1 - z'_u - z'_v} + v\frac{z'_v}{1 - z'_u - z'_v} = u + v - z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad uz'_u + vz'_v = (u+v-z) - z'_u(u+v-z) - z'_v(u+v-z) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u} + (u+2v-z)\frac{\partial z}{\partial v} = u+v-z\,.$$

Пример 17. Преобразовать уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, положив $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z - x$ (ξ, η, ζ — новые независимые переменные).

Решение. $u = u(x,y,z) \;\leftrightarrow\; u = u(\xi,\eta,\zeta)$. Имеем

$$u'_x = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x + u'_\zeta \cdot \zeta'_x = u'_\xi - u'_\eta - u'_\zeta\,,$$

$$u'_y = \underbrace{u'_\xi \cdot \xi'_y}_{=0} + u'_\eta \cdot \eta'_y + \underbrace{u'_\zeta \cdot \zeta'_y}_{=0} = u'_\eta\,,$$

$$u'_z = \underbrace{u'_\xi \cdot \xi'_z}_{=0} + \underbrace{u'_\eta \cdot \eta'_z}_{=0} + u'_\zeta \cdot \zeta'_z = u'_\zeta\,.$$

Исходное уравнение станет таким:

$$u'_\xi - u'_\eta - u'_\zeta + u'_\eta + u'_\zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad u'_\xi = 0\,.$$

Пример 18. Преобразовать уравнение $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные.

Решение. $z = z(x,y) \;\leftrightarrow\; x = x(y,z)$. Имеем $dx = x'_y dy + x'_z dz$. Но $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Поэтому

$$dx = x'_y dy + x'_z(z'_x dx + z'_y dy) \quad \Leftrightarrow \quad dx = x'_z z'_x dx + (x'_y + x'_z z'_y)\,dy\,.$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dy, получаем систему

$$\begin{cases} x'_z \cdot z'_x = 1, \\ x'_y + x'_z \cdot z'_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z'_x = \dfrac{1}{x'_z}, \\[2mm] z'_y = -\dfrac{x'_y}{x'_z}. \end{cases}$$

Подставляя найденные выражения для z'_x и z'_y в исходное уравнение, получим

$$(x-z)\cdot\frac{1}{x'_z} + y\cdot\left(-\frac{x'_y}{x'_z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-z) = y\cdot x'_y \quad \Rightarrow \quad x'_y = \frac{x-z}{y},$$

если $y \neq 0$.

Пример 19. Преобразовать уравнение $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв x за функцию, а $u=y-z$, $v=y+z$ за независимые переменные.

Решение. $z=z(x,y) \quad \leftrightarrow \quad x=x(u,v)$. Имеем

$$dx=x'_u du+x'_v dv=x'_u(dy-dz)+x'_v(dy+dz)=$$
$$=(x'_u+x'_v)\,dy+(x'_v-x'_u)\,dz.$$

Но $dz=z'_x dx+z'_y dy$. Поэтому

$$dx=(x'_u+x'_v)\,dy+(x'_v-x'_u)\,(z'_x dx+z'_y dy) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad dx=\left[x'_u+x'_v+(x'_v-x'_u)z'_y\right]dy+(x'_v-x'_u)z'_x dx.$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dy в последнем соотношении, получаем систему

$$\begin{cases}(x'_v-x'_u)\cdot z'_x=1,\\ (x'_v-x'_u)\cdot z'_y=-(x'_v+x'_u)\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z'_x=\dfrac{1}{x'_v-x'_u},\\ z'_y=-\dfrac{x'_v+x'_u}{x'_v-x'_u}.\end{cases}$$

Подставляя найденные выражения для z'_x и z'_y в исходное уравнение, получим

$$\frac{y-z}{x'_v-x'_u}-\frac{(x'_v+x'_u)(y+z)}{x'_v-x'_u}=0 \quad \Rightarrow \quad u-v(x'_v+x'_u)=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}.$$

Пример 20. Перейти к новым переменным в уравнении

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$$

если $u=x^2+y^2$, $v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, $w=\ln z-(x+y)$.

Решение. $z=z(x,y) \quad \leftrightarrow \quad w=w(u,v)$. Имеем

$$dw=w'_u du+w'_v dv=\frac{dz}{z}-(dx+dy). \qquad (*)$$

Но $du = 2x\,dx + 2y\,dy$, $dv = -\dfrac{dx}{x^2} - \dfrac{dy}{y^2}$, $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Поэтому соотношение (*) перепишется в виде

$$\frac{z'_x dx + z'_y dy}{z} - (dx + dy) = 2w'_u(x\,dx + y\,dy) - w'_v\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{z'_x}{z} - 1 - 2xw'_u + \frac{w'_v}{x^2}\right)dx + \left(\frac{z'_y}{z} - 1 - 2yw'_u + \frac{w'_v}{y^2}\right)dy = 0.$$

Так как здесь dx и dy — дифференциалы независимых переменных, а следовательно, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, где Δx и Δy — произвольные приращения, то получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{z'_x}{z} - 1 - 2xw'_u + \dfrac{w'_v}{x^2} = 0, \\ \dfrac{z'_y}{z} - 1 - 2yw'_u + \dfrac{w'_v}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} z'_x = z\left(1 + 2xw'_u - \dfrac{w'_v}{x^2}\right), \\ z'_y = z\left(1 + 2yw'_u - \dfrac{w'_v}{y^2}\right). \end{cases}$$

Подставляем найденные выражения для z'_x и z'_y в исходное уравнение. Получим

$$yz\left(1 + 2xw'_u - \frac{w'_v}{x^2}\right) - xz\left(1 + 2yw'_u - \frac{w'_v}{y^2}\right) = (y - x)z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y^2}\cdot w'_v - \frac{y}{x^2}w'_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 - y^3}{x^2y^2}w'_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Пример 21. Перейти к новым переменным в уравнении

$$(xy + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz,$$

если $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$.

Решение. $z = z(x,y) \quad \leftrightarrow \quad w = w(u,v)$. Имеем

$$dw = w'_u du + w'_v dv = y\,dx + x\,dy - dz. \qquad (*)$$

Но $du = z\,dy + y\,dz - dx$, $dv = z\,dx + x\,dz - dy$, $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Поэтому соотношение (*) перепишется в виде

$$w'_u(z\,dy + y\,dz - dx) + w'_v(z\,dx + x\,dz - dy) = y\,dx + x\,dy - dz \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad w'_u(z\,dy - dx + yz'_x dx + yz'_y dy) + w'_v(z\,dx - dy + xz'_x dx + xz'_y dy) =$$

$$= y\,dx + x\,dy - z'_x dx - z'_y dy \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (w'_u yz'_x - w'_u + w'_v z + w'_v xz'_x)\,dx + (zw'_u + w'_u yz'_y - w'_v + w'_v xz'_y)\,dy =$$

$$= (y - z'_x)\,dx + (x - z'_y)\,dy\,.$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dy в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases} z'_x(1 + yw'_u + xw'_v) = y + w'_u - zw'_v \\ z'_y(1 + yw'_u + xw'_v) = x + w'_v - zw'_u \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} z'_x &= \frac{y + w'_u - zw'_v}{1 + yw'_u + xw'_v}, \\ z'_y &= \frac{x + w'_v - zw'_u}{1 + yw'_u + xw'_v}. \end{aligned}$$

Подставляем найденные выражения для z'_x и z'_y в исходное уравнение. Получаем

$$(xy + z)\frac{y + w'_u - zw'_v}{1 + yw'_u + xw'_v} + (1 - y^2)\frac{x + w'_v - zw'_u}{1 + yw'_u + xw'_v} = x + yz \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (xy + z)(y + w'_u - zw'_v) + (1 - y^2)(x + w'_v - zw'_u) =$$

$$= (x + yz)(1 + yw'_u + xw'_v) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w'_v(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad w'_v = 0\,.$$

Пример 22. Преобразовать уравнение $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$ (u и v — новые независимые переменные).

Решение. $z = z(x, y) \;\leftrightarrow\; z = z(u, v)$. Имеем

$$z'_x = z'_u(u, v) \cdot u'_x + z'_v(u, v) \cdot v'_x = z'_u(u, v) + z'_v(u, v)\,,$$

$$z''_{x^2} = z''_{u^2} \cdot u'_x + z''_{uv} \cdot v'_x + z''_{v^2} \cdot v'_x + z''_{vu} \cdot u'_x = z''_{u^2} + z''_{uv} + z''_{v^2} + z''_{vu}\,,$$

$$z''_{xy} = z''_{u^2} \cdot u'_y + z''_{uv} \cdot v'_y + z''_{v^2} \cdot v'_y + z''_{vu} \cdot u'_y = 2z''_{u^2} - z''_{uv} - z''_{v^2} + 2z''_{vu}\,,$$

$$z'_y = z'_u(u, v) \cdot u'_y + z'_v(u, v) \cdot v'_y = 2z'_u(u, v) - z'_v(u, v)\,,$$

$$z''_{y^2} = 2z''_{u^2}\cdot u'_y + 2z''_{uv}\cdot v'_y - z''_{vu}\cdot u'_y - z''_{v^2}\cdot v'_y = 4z''_{u^2} - 2z''_{uv} - 2z''_{vu} + z''_{v^2}.$$

Подставляем найденные выражения для z'_x, z'_y, z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2} в исходное уравнение. Получим

$$2(z''_{u^2} + z''_{uv} + z''_{v^2} + z''_{vu}) + (2z''_{u^2} - z''_{uv} - z''_{v^2} + 2z''_{vu}) -$$

$$-(4z''_{u^2} - 2z''_{uv} - 2z''_{vu} + z''_{v^2}) + (z'_u + z'_v) + (2z'_u - z'_v) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 9z''_{uv} + 3z'_u = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \quad (\text{считали, что } z''_{vu} = z''_{uv}).$$

Пример 23. Преобразовать уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$, если $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ (u и v — новые независимые переменные).

Решение. $z = z(x,y) \quad \leftrightarrow \quad z = z(u,v)$. Имеем

$$dz = z'_u(u,v)\,du + z'_v(u,v)\,dv = z'_x dx + z'_y dy.$$

Но $dx = e^u \cos v\,du - e^u \sin v\,dv$, $dy = e^u \sin v\,du + e^u \cos v\,dv$. Поэтому

$$z'_u du + z'_v dv = z'_x(e^u \cos v\,du - e^u \sin v\,dv) + z'_y(e^u \sin v\,du + e^u \cos v\,dv).$$

Сравнивая коэффициенты при du и dv в левой и правой частях равенства, получаем систему.

$$\begin{cases} z'_x e^u \cos v + z'_y e^u \sin v = z'_u, \\ -z'_x e^u \sin v + z'_y e^u \cos v = z'_v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z'_x &= e^{-u}(z'_u \cos v - z'_v \sin v), \\ z'_y &= e^{-u}(z'_u \sin v + z'_v \cos v). \end{aligned}$$

Имеем, далее,

$$d^2 z = z''_{u^2}(du)^2 + 2z''_{uv}du\,dv + z''_{v^2}(dv)^2 = z''_{x^2}(dx)^2 + 2z''_{xy}dx\,dy + z''_{y^2}(dy)^2 =$$

$$= z''_{x^2}(e^u \cos v\,du - e^u \sin v\,dv)^2 +$$

$$+ 2z''_{xy}(e^u \cos v\,du - e^u \sin v\,dv)(e^u \sin v\,du + e^u \cos v\,dv) +$$

$$+ z''_{y^2}(e^u \sin v\,du + e^u \cos v\,dv)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z''_{u^2}(du)^2 + 2z''_{uv}du\,dv + z''_{v^2}(dv)^2 =$$

$$= e^{2u}\Big[(z''_{x^2}\cos^2 v + 2z''_{xy}\sin v\cos v + z''_{y^2}\sin^2 v)(du)^2 +$$

$$+\left(-z''_{x^2}\cdot 2\sin v\cos v+2z''_{xy}(\cos^2 v-\sin^2 v)+z''_{y^2}\cdot 2\sin v\cos v\right)dudv+$$

$$\left.+\,(z''_{x^2}\sin^2 v-2z''_{xy}\sin v\cos v+z''_{y^2}\cos^2 v)(dv)^2\right].$$

Приравнивая коэффициенты при $(du)^2$, $(dudv)$ и $(dv)^2$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему

$$\begin{cases} z''_{x^2}\cos^2 v+2z''_{xy}\sin v\cos v+z''_{y^2}\sin^2 v=e^{-2u}z''_{u^2}, \\ -z''_{x^2}\cdot 2\sin v\cos v+2z''_{xy}(\cos^2 v-\sin^2 v)+z''_{y^2}\cdot 2\sin v\cos v=2e^{-2u}z''_{uv}, \\ z''_{x^2}\sin^2 v-2z''_{xy}\sin v\cos v+z''_{y^2}\cos^2 v=e^{-2u}z''_{v^2}. \end{cases}$$

Складывая соответствующие части первого и третьего уравнений системы, находим:

$$z''_{x^2}+z''_{y^2}=e^{-2u}(z''_{u^2}+z''_{v^2}).$$

А тогда исходное уравнение принимает вид

$$e^{-2u}(z''_{u^2}+z''_{v^2})+m^2z=0 \quad\Rightarrow\quad z''_{u^2}+z''_{v^2}+m^2e^{2u}z=0.$$

Пример 24. Преобразовать уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, если $u=x$, $v=y+z$ (u и v — новые независимые переменные).

Решение. $z=z(x,y)\;\leftrightarrow\; z=z(u,v)$. Имеем

$$dz=z'_u du+z'_v dv=z'_x dx+z'_y dy.$$

Но $du=dx$, $dv=dy+dz=dy+z'_x dx+z'_y dy$. Поэтому

$$z'_u dx+z'_v(dy+z'_x dx+z'_y dy)=z'_x dx+z'_y dy.$$

Приравнивая коэффициенты при dx и dy в левой и правой частях равенства, получаем систему

$$\begin{cases} z'_u+z'_v z'_x=z'_x, \\ z'_v+z'_v z'_y=z'_y \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} z'_x&=\frac{z'_u}{1-z'_v}, \\ z'_y&=\frac{z'_v}{1-z'_v}. \end{aligned}$$

Имеем, далее,

$$d^2z=z''_{u^2}(du)^2+2z''_{uv}dudv+z''_{v^2}(dv)^2=$$

$$=z''_{x^2}(dx)^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{y^2}(dy)^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z''_{u^2}(dx)^2 + 2z''_{uv}dx(dy + z'_x dx + z'_y dy) + z''_{v^2}(dy + z'_x dx + z'_y dy)^2 =$$

$$= z''_{x^2}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}(dy)^2 .$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициент при $dxdy$ в левой и правой частях, получаем

$$2z''_{xy} = 2z''_{uv}(1 + z'_y) + z''_{v^2} \cdot 2z'_x(1 + z'_y) .$$

У нас $z'_x = \dfrac{z'_u}{1 - z'_v}$, $1 + z'_y = \dfrac{1}{1 - z'_v}$. Поэтому $z''_{xy} = \dfrac{z''_{uv}}{1 - z'_v} +$ $+ z''_{v^2} \dfrac{z'_u}{(1 - z'_v)^2}$. Следовательно, исходное уравнение станет таким:

$$\frac{z''_{uv} \cdot (1 - z'_v) + z'_u \cdot z''_{v^2}}{(1 - z'_v)^2} = \frac{1}{(1 - z'_v)^2} \quad \Rightarrow \quad (1 - z'_v) \cdot z''_{uv} + z'_u \cdot z''_{v^2} = 1 .$$

Пример 25. Преобразовать уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} +$ $+\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = x$, $v = x + y$, $w = x + y + z$ (u и v — новые независимые переменные, $w = w(u, v)$ — новая функция).

Решение. $z = z(x, y) \;\leftrightarrow\; w = w(u, v)$. Имеем $dw = w'_u du + w'_v dv =$ $= dx + dy + dz$. Но $du = dx$, $dv = dx + dy$, $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Поэтому

$$w'_u dx + w'_v(dx + dy) = (1 + z'_x)\,dx + (1 + z'_y)\,dy .$$

Приравнивая коэффициенты при dx и dy в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} w'_u + w'_v = 1 + z'_x, \\ w'_v = 1 + z'_y \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} z'_x &= w'_u + w'_v - 1, \\ z'_y &= w'_v - 1. \end{aligned}$$

У нас $dw = dx + dy + dz \;\Rightarrow\; d^2 w = d^2 z$, т. е.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(du)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(dv)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 .$$

Здесь $du = dx$, $dv = dx + dy$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\left[(dx)^2 + dxdy\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(dx+dy)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при $(dx)^2$, $dxdy$ и $(dy)^2$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Заметим еще, что у нас $1 + \dfrac{y}{x} = \dfrac{v}{u}$. Поэтому исходное уравнение станет таким:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1\right) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

ТЕОРИЯ РЯДОВ

Теория рядов — один из важнейших разделов математики. В ней исследуются вопросы, связанные с перенесением свойств элементарных алгебраических операций, а также правил дифференцирования и интегрирования (хорошо известных, когда число слагаемых конечно) на случай бесконечного числа слагаемых.

Теория рядов широко используется в приближенных вычислениях. С ее помощью составляются таблицы значений функций, вычисляются определенные интегралы от функций, у которых первообразные неэлементарны, находятся решения широкого и весьма важного для физики и техники класса дифференциальных уравнений.

Глава 5

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ

§1. Определение ряда и его сходимость. Простейшие свойства сходящихся рядов

1°. Пусть имеется бесконечная последовательность вещественных чисел $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \left(\text{или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \tag{1}$$

называется *числовым рядом*, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — *членами ряда*.

Величины

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \quad \ldots$$

называются частичными суммами ряда (1) (s_n — n-я частичная сумма ряда). Очевидно, что частичные суммы ряда составляют бесконечную последовательность

$$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,. \tag{2}$$

Определение. Если существует конечный или бесконечный, но определенного знака, предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{3}$$

то этот предел s называют суммой ряда (1) и пишут:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

Если s — число конечное, то говорят, что ряд (1) сходится. Если $s = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то говорят, что ряд (1) расходится.

Пример 1. Для ряда

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots \tag{4}$$

имеем $s_n = n \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty \;\Rightarrow$ ряд (4) расходится.

Пример 2. Для ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{5}$$

имеем $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$, , т.е. $s_{2n-1} = 1$, $s_{2n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует $\Rightarrow$ ряд (5) расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{6}$$

▶ В этом примере $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Поэтому

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (6) сходится, и его сумма s равна 1. ◀

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \qquad (a \neq 0).$$

Это — так называемый геометрический ряд.

▶ Составим n-ю частичную сумму данного ряда:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}.$$

Если предположить, что $q \neq 1$, то по известной формуле из элементарной алгебры находим

$$s_n = a\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q}\cdot q^n.$$

1) Пусть $|q|<1$. Тогда $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$ (существует, конечный).

2) Пусть $|q|>1$. Тогда $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, а значит, и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

3) Пусть $q=1$. Тогда $s_n = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ слагаемых}} = na \Rightarrow$

$$\Rightarrow s_n \to \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad a>0 \\ -\infty, & \text{если} \quad a<0 \end{cases}.$$

4) Пусть $q=-1$. Тогда будем иметь ряд

$$a-a+a-a+\ldots+(-1)^{n-1}a+\ldots$$

Легко видеть: если частичная сумма содержит четное число слагаемых, то она равна нулю:

$$s_{2n} = \underbrace{(a-a)+(a-a)+\ldots+(a-a)}_{n \text{ скобок}} = 0;$$

если частичная сумма содержит нечетное число слагаемых, то она равна a: $s_{2n+1}=a$.

Частичная сумма нашего ряда s_n поочередно принимает только два значения: 0 и a и, следовательно, предела не имеет. Таким образом, геометрический ряд сходится лишь тогда, когда $|q|<1$ или, иначе, при $-1<q<1$. ◀

2°. Необходимое условие сходимости ряда.

Теорема. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{7}$$

▶ Обозначим через s сумму данного ряда. Имеем

$$s_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n = s_{n-1}+a_n \Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s-s=0. \text{ ◀}$$

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то это вовсе *не означает*, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. В самом деле, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Здесь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$, т.е. условие (7) выполнено.

Имеем, однако,

$$s_n = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty \;\Rightarrow$ ряд (8) расходится.

Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является *необходимым условием* сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится).

3°. Простейшие свойства сходящихся рядов.

1. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

сходится и его сумма равна s. Пусть c — определенное число. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots \tag{9}$$

тоже сходится, и его сумма равна $c\cdot s$.

▶ Обозначим через s_n и σ_n n-е частичные суммы рядов (1) и (9) соответственно. Имеем

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c\cdot s_n. \tag{10}$$

По условию, ряд (1) сходится и его сумма равна s. Значит, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot s_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} s_n = c\cdot s$ (существует, конечный) $\Rightarrow$ ряд (9) сходится, и его сумма равна $c\cdot s$. ◀

2. Пусть имеются два сходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{12}$$

Пусть A и B — суммы рядов (11) и (12) соответственно. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \tag{13}$$

тоже сходится, и его сумма равна $A \pm B$.

▶ Обозначим n-е частичные суммы рядов (11), (12), (13) через A_n, B_n, σ_n соответственно. Имеем

$$\sigma_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = A_n \pm B_n.$$

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ (существуют, конечные). Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B$$

— существует, конечный. Значит, ряд (13) сходится, и его сумма равна $A \pm B$. ◀

3. Члены сходящегося ряда можно, не меняя их местами, объединять в группы. От этого сходимость ряда не нарушится, и величина его суммы не изменится.

Иначе: пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{14}$$

сходится, и его сумма равна s; пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ — произвольная, строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда ряд

$$\begin{gathered}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1}) + (a_{p_1+1} + a_{p_1+2} + \ldots + a_{p_2}) + \ldots + \\ + (a_{p_{k-1}+1} + a_{p_{k-1}+2} + \ldots + a_{p_k}) + \ldots\end{gathered} \tag{15}$$

тоже сходится и его сумма равна s.

▶ Обозначим p-ю частичную сумму ряда (14) через s_p, а k-ю частичную сумму ряда (15) — через σ_k. Имеем

$$\sigma_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_1}) + (a_{p_1+1} + a_{p_1+2} + \ldots + a_{p_2}) + \ldots +$$

$$+ (a_{p_{k-1}+1} + a_{p_{k-1}+2} + \ldots + a_{p_k}) = s_{p_k}.$$

Видим, что $\left\{s_{p_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ есть подпоследовательность, выделенная из последовательности $\left\{s_p\right\}_{p\in\mathbb{N}}$. По условию, ряд (14) сходится и его сумма равна s. Это означает, что $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = s$ (s — конечное число). Известно, что любая подпоследовательность, выделенная из сходящейся последовательности, тоже сходится, и притом к тому же самому пределу. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} s_{p_k}$ существует и равен s, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = s$ (существует, конечный) $\Rightarrow$ ряд (15) сходится, и его сумма равна s. ◀

Замечание. Раскрывать скобки в сходящемся ряде, вообще говоря, нельзя. Например, ряд

$$(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots$$

сходится, и его сумма $s = 0$; если же раскрыть скобки, то получится расходящийся ряд: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ (см. п. 1°, пример 2).

4°. Ряд и его остаток.

Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{16}$$

Пусть m — произвольное фиксированное натуральное число. Ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots \tag{17}$$

называется остатком ряда (16) после m-го члена.

Теорема. Ряд (16) и его остаток после m-го члена (17) сходятся и расходятся одновременно.

▶ Обозначим n-ю частичную сумму ряда (16) через s_n, а k-ю частичную сумму ряда (17) — через σ_k. Имеем

$$s_{m+k} = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}_{=s_m} + \underbrace{a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}}_{=\sigma_k} = s_m + \sigma_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_k = s_{m+k} - s_m. \tag{18}$$

Так как m фиксировано, то s_m в (18) — определенное число.

α) Пусть ряд (16) сходится и его сумма равна s. Из этого следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} s_{m+k} = s$ (существует, конечный). Но тогда из (18) следует, что существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \lim\limits_{k\to\infty} s_{m+k} - s_m = s - s_m$. Последнее означает, что ряд (17) сходится и его сумма σ равна $s - s_m$. Таким образом, из сходимости ряда (16) следует сходимость ряда (17).

β) Пусть ряд (17) сходится и его сумма равна σ. Это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \sigma$ (существует, конечный). У нас $s_{m+k} = s_m + \sigma_k$. Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\lim_{k\to\infty} s_{m+k} = \lim_{k\to\infty} (s_m + \sigma_k) = s_m + \lim_{k\to\infty} \sigma_k = s_m + \sigma$$

(существует, конечный) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд (16) сходится, и его сумма s равна $s_m + \sigma$. Итак, из сходимости ряда (17) следует сходимость ряда (16).

γ) Пусть ряд (16) расходится. Требуется доказать, что тогда расходится и ряд (17).

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (17) сходится. Но тогда по пункту β) должен сходиться ряд (16), а это не так. Значит, расходимость ряда (16) влечет за собой расходимость ряда (17).

δ) Пусть ряд (17) расходится. Нужно показать, что расходится тогда и ряд (16).

И здесь рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (16) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться ряд (17), а это не так. Следовательно, расходимость ряда (17) влечет за собой расходимость ряда (16).

Вывод: ряды (16) и (17) либо оба сходятся, либо оба расходятся. ◀

Замечание. Из доказательства теоремы следует: если ряды (16) и (17) сходятся, то между их суммами s и σ существует следующая связь

$$\sigma = s - s_m. \tag{19}$$

В (19) m фиксированное, но произвольное. Станем неограниченно увеличивать m. Тогда $s_m \xrightarrow[m\to\infty]{} s$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma = 0$. Таким образом, приходим к выводу:

Сумма остатка ряда после m-го члена у сходящегося ряда стремится к нулю при $m \to \infty$.

§2. Положительные ряды. Признаки сравнения

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется положительным, если $a_n \geq 0$, для всех $n \in \mathrm{N}$.

Если ряд (1) положительный, то ясно, что

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_n \leq \ldots ,$$

т.е. что последовательность частичных сумм ряда (1) $\{s_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ — неубывающая. Мы знаем, что для сходимости таких последовательностей необходима и достаточна ограниченность их сверху, т.е. необходимо и достаточно существование числа $M > 0$ такого, что $s_n \leq M$ для всех $n \in \mathrm{N}$. Так как сходимость ряда (1) равносильна сходимости последовательности $\{s_n\}_{n \in \mathrm{N}}$, то получаем:

Теорема 1. Для сходимости положительного ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы существовало число $M > 0$, такое, что $s_n \leq M$, для всех $n \in \mathrm{N}$.

Для исследования сходимости положительных рядов существует большое число достаточных признаков сходимости. Некоторые из них позволяют сводить выяснение вопроса о сходимости данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или поведение которого уже выяснено. Такие признаки называются признаками сравнения.

Теорема 2 (первый признак сравнения).

Пусть имеются два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{2}$$

причем члены первого, начиная с некоторого места, не превосходят соответствующих членов второго:

$$a_n \leq b_n, \quad n = m+1,\ m+2,\ \ldots \quad (m \geq 0,\ \text{целое}). \tag{3}$$

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

▶ 1. Докажем сначала утверждения теоремы для случая, когда $m = 0$, т.е. когда неравенство (3) выполняется для $n = 1, 2, 3, \ldots$ (т.е. для любого $n \in \mathbf{N}$).

Обозначим n-е частичные суммы рядов (1) и (2) через A_n и B_n соответственно. Ясно, в силу (3), что

$$A_n \le B_n. \tag{4}$$

α) Пусть ряд (2) сходится. Но тогда (см. теорему 1) существует число $M > 0$ такое, что $B_n \le M$ для всех $n \in \mathbf{N}$. В силу (4) и подавно будет $A_n \le M$, для всех $n \in \mathbf{N}$. А, следовательно, по теореме 1 ряд (1) сходится. Итак, показано: из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

β) Пусть ряд (1) расходится. Нужно показать, что ряд (2) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (2) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться ряд (1), а это не так. Таким образом, из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

2. Обсудим теперь случай, когда $m > 0$ ($m \in \mathbf{N}$).

Вместо рядов (1) и (2) рассмотрим их остатки после m-го члена. Это будут ряды

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{$\tilde{1}$}$$

и

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n. \tag{$\tilde{2}$}$$

В рядах $(\tilde{1})$, $(\tilde{2})$ уже все члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда. Поэтому, по доказанному в пункте 1, из сходимости ряда $(\tilde{2})$ следует сходимость ряда $(\tilde{1})$, а из расходимости ряда $(\tilde{1})$ следует расходимость ряда $(\tilde{2})$.

Ранее было установлено, что ряд и его остаток после m-го члена сходятся или расходятся одновременно. Значит, для рядов (1) и (2) будет справедливо то же, что доказано для рядов $(\tilde{1})$ и $(\tilde{2})$, а именно: из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2). ◀

Пример. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots .$$

Рассмотрим остаток этого ряда после 1-го члена:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,.$$

Ранее был изучен ряд (см. §1, п. 1°, пример 3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\,.$$

Имеем $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$, т.е. $a_n<b_n$, для всех $n\in\mathbf{N}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится, то по теореме 2 заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ сходится. Значит, по теореме 1, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Теорема 3 (второй признак сравнения).

Пусть имеются два строго положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{5}$$

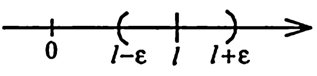
и

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{6}$$

($a_n>0$, $b_n>0$ для всех $n\in\mathbf{N}$). Пусть существует конечный, отличный от нуля, предел

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\quad (l\neq 0,\ l\neq\infty).$$

Тогда ряды (5) и (6) сходятся или расходятся одновременно.



▶ По условию, $l\neq 0$. Значит, $l>0$, ибо $\frac{a_n}{b_n}>0$ для любого $n\in\mathbf{N}$. Возьмем $\varepsilon>0$ — любое, но такое, что $l-\varepsilon>0$. У нас $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\Rightarrow$ взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, такой, что будет $l-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<l+\varepsilon$, если $n>N$. Положим $p=l-\varepsilon$, $q=l+\varepsilon$ ($p>0$, $q>0$ — определенные числа). Предыдущее неравенство может быть записано теперь в виде

$$pb_n < a_n < qb_n, \quad \text{если} \quad n > N. \tag{7}$$

α) Пусть ряд (5) сходится. Но тогда по теореме 2 сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p \cdot b_n$, а значит, сходится ряд (6), ибо ряд (6) получается из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p \cdot b_n$ умножением всех его членов на число $\frac{1}{p}$. Итак, из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда (6).

β) Пусть ряд (6) сходится. Но тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q \cdot b_n$, а значит, по теореме 2 сходится ряд (5). Таким образом, из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5).

γ) Пусть ряд (5) расходится. Нужно показать, что ряд (6) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (6) сходится. Но тогда по пункту β) должен сходиться и ряд (5), а это не так. Видим, что из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

δ) Пусть ряд (6) расходится. Нужно доказать, что ряд (5) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (5) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться и ряд (6), а это не так. Значит, из расходимости ряда (6) следует расходимость ряда (5). ◀

Пример. Пусть имеется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (это — так называемый гармонический ряд). Известно, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$. Значит ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ сходятся или расходятся одновременно. Было показано ранее, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ расходится. Следовательно, гармонический ряд есть ряд расходящийся.

Теорема 4 (третий признак сравнения).

Пусть имеются два строго положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{8}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{9}$$

($a_n > 0$, $b_n > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$). Пусть, начиная с некоторого места, т.е. для $n \geq m$ ($m \in \mathbf{N}$) оказывается

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{10}$$

Тогда из сходимости ряда (9) следует сходимость ряда (8), а из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (9).

▶ 1. Рассмотрим сначала случай, когда неравенство (10) выполняется для $n = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. для любого $n \in \mathbf{N}$. Но тогда

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leq \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив соответствующие части этих соотношений, получим

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n, \quad \text{для любого } n \in \mathbf{N}. \tag{11}$$

Заметим, что в (11) отношение $\dfrac{a_1}{b_1}$ — определенное число.

α) Пусть ряд (9) сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1}{b_1} b_n$ сходится $\Rightarrow$ по первому признаку сравнения, ряд (8) сходится.

β) Пусть ряд (8) расходится. Нужно доказать, что ряд (9) тоже расходится.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (9) сходится. Но тогда по пункту α) ряд (8) должен сходиться, а это не так. Следовательно, из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (9).

2. Обсудим теперь случай, когда неравенство (10) выполняется для $n > m$ ($m \in \mathbb{N}$). В этом случае вместо рядов (8) и (9) рассмотрим их остатки после m-го члена. Это будут ряды

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{$\tilde{8}$}$$

и

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\,. \tag{$\tilde{9}$}$$

В рядах $(\tilde{8})$, $(\tilde{9})$ уже все члены, начиная с первого, будут удовлетворять неравенству (10). А тогда, по доказанному в пункте 1, из сходимости ряда $(\tilde{9})$ следует сходимость ряда $(\tilde{8})$, а из расходимости ряда $(\tilde{8})$ следует расходимость ряда $(\tilde{9})$. Так как ряд и его остаток сходятся и расходятся одновременно, то для рядов (8) и (9) будет справедливо то же, что доказано для рядов $(\tilde{8})$, $(\tilde{9})$, а именно: из сходимости ряда (9) следует сходимость ряда (8), а из расходимости ряда (8) следует расходимость ряда (9). ◀

Замечание. Признаки сравнения для успешного их применения нуждаются в арсенале "эталонных рядов", как сходящихся, так и расходящихся, с которыми затем сравниваются исследуемые ряды. Поэтому мы при всякой появляющейся возможности будем стремиться пополнять этот арсенал.

§3. Интегральный признак Коши

Для исследования сходимости положительного ряда с монотонно убывающими членами часто оказывается полезным так называемый интегральный признак Коши.

Теорема (интегральный признак Коши).

Пусть имеется числовой положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \tag{1}$$

члены которого монотонно убывают.

Пусть $f(x)$ — функция, определенная в промежутке $[1, +\infty)$, непрерывная, положительная и монотонно убывающая там. Пусть, далее, $f(x)$ такая, что $f(x)\big|_{x=n} = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) (в этом случае $f(x)$ называется производящей функцией для ряда (1)). Тогда ряд (1) и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \tag{2}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Начальным значением номера n, вместо 1, может быть и любое другое натуральное число n_0. Тогда и функцию $f(x)$ следует рассматривать при $x \ge n_0$.

▶ Вспомним, что сходимость несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ равносильна существованию конечного предела

$$J = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx\,.$$

У нас по условию $f(x)$ — положительная $\Rightarrow$ $\int_1^A f(x)\,dx$ представляет собой функцию от A, возрастающую вместе с A. Поэтому для существования конечного предела $J = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\int_1^A f(x)\,dx$ была ограниченной сверху при любом $A > 1$.

По условию, $f(x)$ — монотонно убывающая в промежутке $[1, +\infty)$. Поэтому из соотношения $k \le x \le k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) следует $f(k) \ge f(x) \ge f(k+1)$. Интегрируя последнее неравенство по x от k до $k+1$, получаем

$$\int_k^{k+1} f(k)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx\,.$$

$\Rightarrow$ принимая во внимание, что $f(k) = a_k$, $f(k+1) = a_{k+1}$, находим

$$a_k \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge a_{k+1}\,. \tag{3}$$

Рассмотрим левое неравенство из (3) при $k = 1, 2, \dots, n$. Будем иметь

$$a_1 \ge \int_1^2 f(x)\,dx, \quad a_2 \ge \int_2^3 f(x)\,dx, \quad \dots\,, \quad a_n \ge \int_n^{n+1} f(x)\,dx\,.$$

Сложив соответствующие части этих неравенств, получим

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{=s_n} \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n .$$

α) Пусть ряд (1) сходится и его сумма равна s. Так как (1) — положительный ряд, то

$$s_n \leq s , \quad \text{для любого } n \in \mathbf{N} .$$

Но тогда и подавно

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s , \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N} .$$

Пусть A — любое, сколь угодно большое число ($A > 1$). Всегда можно указать натуральное число n, такое, что будет $A \leq n+1$, и, следовательно, $\int_1^{A} f(x)\,dx \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s \Rightarrow \int_1^{A} f(x)\,dx$ — функция от A, возрастающая вместе с A и ограниченная сверху $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Видим, что из сходимости ряда (1) следует сходимость несобственного интеграла (2).

Рассмотрим теперь правое неравенство из (3) при $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Будем иметь

$$a_2 \leq \int_1^{2} f(x)\,dx, \quad a_3 \leq \int_2^{3} f(x)\,dx, \quad \ldots , \quad a_n \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx .$$

Сложив соответствующие части этих неравенств, получаем

$$\underbrace{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{=s_n - a_1} \leq \int_1^{n} f(x)\,dx \Rightarrow s_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)\,dx, \text{ для любого } n \in \mathbf{N} .$$

β) Пусть несобственный интеграл (2) сходится. Это означает, что существует конечный предел $J = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^{A} f(x)dx \Rightarrow$ в частности, существует $\lim\limits_{n \to \infty} \int_1^{n} f(x)dx = J$. Ясно, что $\int_1^{n} f(x)dx \leq J$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Но тогда и подавно

$$s_n \le a_1 + J, \text{ для любого } n \in \mathrm{N}.$$

Видим, что последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — ограниченная сверху. Так как эта последовательность еще и неубывающая, то приходим к выводу, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ $\Leftrightarrow$ ряд (1) сходится. Показано, таким образом, что сходимость несобственного интеграла (2) влечет за собой сходимость ряда (1).

γ) Пусть ряд (1) расходится. Нужно показать, что тогда расходится и несобственный интеграл (2).

Рассуждаем от противного. Допустим, что несобственный интеграл (2) сходится. Но тогда по пункту β) должен сходиться и ряд (1), а это не так. Значит, из расходимости ряда (1) следует расходимость несобственного интеграла (2).

δ) Пусть несобственный интеграл (2) расходится. Нужно показать, что тогда расходится и ряд (1).

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (1) сходится. Но тогда по пункту α) должен сходиться и несобственный интеграл (2), а это не так. Значит, расходимость несобственного интеграла (2) влечет за собой расходимость ряда (1). Таким образом, теорема доказана полностью. ◀

Рассмотрим примеры применения интегрального признака Коши.

Пример 1. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}. \tag{4}$$

▶ Производящей для ряда (4) будет функция

$$f(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}, \quad x \in [1, +\infty).$$

1. Пусть $\lambda < 1$. Имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_{x=1}^{x=A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda}\left(A^{1-\lambda} - 1\right) = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} \text{ расходится } \Rightarrow \text{ ряд (4) расходится, если } \lambda < 1.$$

2. Пусть $\lambda = 1$. Имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln x\Big|_{x=1}^{x=A} = \lim_{A\to+\infty} \ln A = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится $\Rightarrow$ ряд (4) расходится, если $\lambda = 1$.

3. Пусть $\lambda > 1$. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{A^{\lambda-1}} - 1\right) = \frac{1}{\lambda - 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится, если $\lambda > 1$ $\Rightarrow$ ряд (4) сходится, если $\lambda > 1$.

Итак, ряд (4) сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \le 1$. ◀

Замечание. Обобщенный гармонический ряд является наиболее часто применяемым “эталонным рядом” в признаках сравнения.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \tag{5}$$

▶ Производящей для ряда (5) будет функция

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x \in [2, +\infty).$$

Имеем

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln x)\Big|_{x=2}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) = +\infty \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ расходится $\Rightarrow$ ряд (5) расходится. ◀

Замечание об оценке суммы остатка сходящегося ряда.

Пусть с помощью интегрального признака Коши удалось установить, что ряд (1) сходится. Значит, этот ряд имеет сумму s. Однако найти точное значение суммы s удается лишь в сравнительно немногих случаях. Поэтому приходится вычислять s приближенно с указанной точностью, т.е. с заданной абсолютной погрешностью ε.

Приближенным значением суммы s ряда будет его n-я частичная сумма s_n, т.е. $s \approx s_n$.

Задача состоит в следующем: определить, сколько нужно взять первых членов ряда для вычисления s_n, чтобы отбрасывание всех остальных членов вызывало бы ошибку, не превосходящую ε.

Так как значение суммы s неизвестно, то для величины $(s - s_n)$ приходится отыскивать некоторую оценку сверху: $(s - s_n) \le \alpha_n$, где α_n — некоторая функция от n, а затем, решая относительно n неравенство $\alpha_n \le \varepsilon$, определять значение $n = m$, наименьшее из возможных, но такое, чтобы было $\alpha_m \le \varepsilon$. При таком $n = m$ и подавно будет $(s - s_n) \le \varepsilon$.

Пусть

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots , \qquad (\tilde{1})$$

т.е. R_n — сумма остатка ряда (1) после n-го члена, так что $s = s_n + R_n$. Рассмотрим правое неравенство (3) при $k = n, n+1, \dots, n+l-1$. Будем иметь

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx, \quad a_{n+2} \le \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx, \quad \dots , \quad a_{n+l} \le \int_{n+l-1}^{n+l} f(x)\,dx.$$

Сложив соответствующие части этих неравенств, получим

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+l} \le \int_n^{n+l} f(x)\,dx, \quad \text{т.е.} \quad \sigma_l \le \int_n^{n+l} f(x)\,dx,$$

где σ_l — l-я частичная сумма ряда $(\tilde{1})$. Ясно, что $\sigma_l \le \int\limits_n^{+\infty} f(x)\,dx$,

для любого $l \in \mathbb{N}$. Переходя здесь к пределу при $l \to \infty$, находим

$$R_n \le \int_n^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (6)$$

(6) есть оценка сверху суммы остатка сходящегося ряда (1).

Например, для обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ при

$\lambda > 1$ оценка принимает вид

$$R_n \le \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \int_n^{+\infty} x^{-\lambda} dx = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda}\Big|_{x=n}^{x=+\infty} = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \frac{1}{n^{\lambda-1}}.$$

§4. Признак Куммера

Признак Куммера является весьма общим признаком сходимости положительных рядов. Его можно рассматривать как общую схему для получения конкретных признаков. Как частные случаи из него получаются удобные для практического применения признаки сходимости положительных рядов.

Теорема 1 (признак Куммера).

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $\{c_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — последовательность положительных чисел, произвольная, но такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \tag{2}$$

расходится. Составим для ряда (1) переменную

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

(K_n — переменная Куммера). Тогда

1. Если, начиная с некоторого места, т.е. для $n \ge N_*$ ($N_* \in \mathrm{N}$), оказывается

$$K_n \ge s, \tag{3}$$

где $s > 0$ — определенное число, то ряд (1) сходится.

2. Если, начиная с некоторого места, т.е. для $n \ge N_*$ ($N_* \in \mathrm{N}$), оказывается

$$K_n < 0, \tag{4}$$

то ряд (1) расходится.

▶ 1а. Рассмотрим сначала случай, когда неравенство (3) выполняется для $n = 1, 2, 3, \ldots$ (т.е. для любого $n \in \mathrm{N}$). Но тогда $(c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1}) \ge s a_{n+1} > 0$ для любого $n \in \mathrm{N}$ $\Rightarrow$ $c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}$ для любого $n \in \mathrm{N}$ $\Rightarrow$ $\{c_n a_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — монотонно убывающая последовательность. Ясно, что эта последовательность ограничена снизу, например, числом 0 ($c_n a_n > 0$ для всех $n \in \mathrm{N}$). Значит, существует конечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} (c_n a_n)$.

Введем теперь в рассмотрение ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1}). \tag{5}$$

Пусть s_n — n-я частичная сумма ряда (5). Имеем

$$s_n = (c_1 a_1 - c_2 a_2) + (c_2 a_2 - c_3 a_3) + \ldots +$$

$$+ (c_{n-1}a_{n-1} - c_n a_n) + (c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1}) =$$

$$= (c_1 a_1 - c_{n+1}a_{n+1}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}(c_1 a_1 - c_{n+1}a_{n+1}) = (c_1 a_1 - l)$ (существует, конечный). Значит, ряд (5) сходится.

У нас $(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1}) \geq s a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$. По первому признаку сравнения, из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s a_{n+1} \Rightarrow$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s a_n \Rightarrow$ сходимость ряда (1).

1б. В случае, когда неравенство (3) выполняется для $n > N_*$, где $N_* \in \mathbf{N}$, вместо ряда (1) следует рассматривать его остаток после N_*-го члена, а именно ряд

$$\sum_{n=N_*+1}^{\infty} a_n. \tag{$\tilde{1}$}$$

У ряда ($\tilde{1}$) уже все члены, начиная с первого, будут удовлетворять неравенству (3). А тогда по доказанному выше ряд ($\tilde{1}$) будет сходящимся, а значит, будет сходиться и ряд (1), так как ряд и его остаток после N_*-го члена сходятся или расходятся одновременно.

2. По условию $K_n < 0$ для всех $n \geq N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$), т.е. $c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} -$

$$- c_{n+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{c_n}{c_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\dfrac{1}{c_{n+1}}}{\dfrac{1}{c_n}} \quad \text{для всех} \quad n \geq N_*$$

($N_* \in \mathbf{N}$). А тогда по третьему признаку сравнения из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1). ◀

Замечание. Условие теоремы 1, что ряд (2) расходится, используется лишь при доказательстве пункта 2.

Теорема 2 (признак Куммера в предельной форме).

Пусть имеется строго положительный ряд

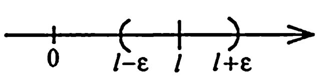
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{1}$$

Пусть $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел, произвольная, но такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} \tag{2}$$

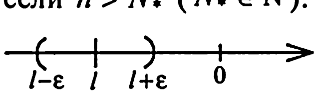
расходится. Пусть $K_n = c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$. Тогда

1. Если $l > 0$, то ряд (1) сходится.
2. Если $l < 0$, то ряд (1) расходится.



▶ 1а. Пусть $l > 0$, конечное. Возьмем $\varepsilon > 0$ любое, но такое, что $l - \varepsilon > 0$. По условию $l = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_*, такой, что $l - \varepsilon < K_n < l + \varepsilon$, если $n > N_*$ $\Rightarrow$ в частности, $K_n > l - \varepsilon$, если $n > N_*$ ($N_* \in \mathbb{N}$). Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) сходится (в роли числа $s > 0$ выступает число $l - \varepsilon$).

1б. Пусть $l = +\infty$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = +\infty$. Это означает, что любому числу $M > 0$ отвечает номер N_*, такой, что $K_n > M$, если $n > N_*$ ($N_* \in \mathbb{N}$). Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) сходится (в роли числа $s > 0$ выступает число $M > 0$).



2а. Пусть $l < 0$, конечное. Возьмем число $\varepsilon > 0$ любое, но такое, что $l + \varepsilon < 0$. По условию $l = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_*, такой, что $l - \varepsilon < K_n < l + \varepsilon$, если $n > N_*$ $\Rightarrow$ в частности, $K_n < l + \varepsilon$ (< 0), если $n > N_*$. Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится.

2б. Пусть $l = -\infty$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = -\infty$. Это означает, что любому числу $M > 0$ отвечает номер N_*, такой, что $K_n < -M$ (< 0), если $n > N_*$. Но тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится. ◀

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = 0$, то признак Куммера не дает ответа на вопрос о поведении ряда (1).

Покажем теперь, как при помощи признака Куммера можно получить некоторые важные признаки сходимости положительных рядов как частные случаи его.

I. Пусть $c_n = 1$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

расходится, так что условие, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходился, соблюдено. Имеем $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$. Положим $D_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ (D_n — переменная Даламбера). Тогда

$$K_n = D_n - 1. \tag{6}$$

Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$l = \lim_{n\to\infty} D_n.$$

Видим из (6):

1) если $l > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n > 0$ и, следовательно, ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n < 0$ и, следовательно, ряд (1) расходится;

3) если $l = 1$, то ничего определенного о поведении ряда (1) сказать нельзя.

Получен, таким образом, **признак Даламбера**.

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $D_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$l = \lim_{n\to\infty} D_n .$$

Тогда:

1) если $l > 1$, то ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то ряд (1) расходится.

(Если $l = 1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о поведении ряда (1).)

II. Пусть $c_n = n$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (это — гармонический ряд). Имеем

$$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 .$$

Положим $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ (R_n — переменная Раабе). Тогда

$$K_n = R_n - 1 . \tag{7}$$

Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$l = \lim_{n\to\infty} R_n .$$

Из (7) следует:

1) если $l > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n > 0$ и, следовательно, ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n < 0$ и, следовательно, ряд (1) расходится;

3) если $l = 1$, то ничего определенного о поведении ряда (1) сказать нельзя.

Получен, таким образом, **признак Раабе.**

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{1}$$

Пусть $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$. Тогда:

1) если $l > 1$, то ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то ряд (1) расходится.

(Если $l = 1$, то признак Раабе не дает ответа на вопрос о поведении ряда (1).)

Замечание. Имеем
$$R_n = n(D_n - 1)\,. \tag{8}$$
Из (8) следует:

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} D_n > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = +\infty$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} D_n < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = -\infty$.

Видим, что всего лишь двумя значениями предела переменной Раабе, а именно $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = -\infty$, охватываются все случаи, когда признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении ряда (1). Следовательно, признак Раабе значительно сильнее признака Даламбера.

III. Пусть $c_n = n\ln n$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{c_n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ расходится (это было показано ранее, см. §3, пример 2). Имеем
$$K_n = c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) =$$
$$= n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$
$$= n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$
$$= \ln n\cdot\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Положим $B_n = \ln n\cdot\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$ (B_n — переменная Бертрана). Тогда
$$K_n = B_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{9}$$
Пусть существует конечный или бесконечный предел
$$l = \lim_{n\to\infty} B_n\,.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = 1$, то из (9) следует:

1) если $l > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n > 0$ и, следовательно, ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} K_n < 0$ и, следовательно, ряд (1) расходится;

3) если $l = 1$, то ничего определенного о поведении ряда (1) сказать нельзя.

Получен, таким образом, **признак Бертрана**.

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Пусть $B_n = \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$. Тогда:

1) если $l > 1$, то ряд (1) сходится;

2) если $l < 1$, то ряд (1) расходится.

(Если $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 1$, то признак Бертрана не даёт ответа на вопрос о поведении ряда (1).)

Замечание. Имеем

$$B_n = \ln n \cdot (R_n - 1). \tag{10}$$

Из (10) следует:

1) если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = -\infty$.

Видим, что всего лишь двумя значениями предела переменной Бертрана, а именно $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = -\infty$, охватываются все случаи, когда признак Раабе дает ответ на вопрос о поведении ряда (1). Следовательно, признак Бертрана значительно сильнее признака Раабе.

IV. Признак Гаусса.

Пусть имеется строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,. \tag{1}$$

Пусть отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ представимо в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^\alpha}, \tag{11}$$

где λ, μ, α — некоторые числа, причем $\alpha > 1$; θ_n — ограниченная переменная, т.е. существует число $M > 0$, такое, что $|\theta_n| \le M$, для любого $n \in \mathrm{N}$. Тогда:

1) если $\lambda > 1$ (μ — любое), то ряд (1) сходится;

2) если $\lambda < 1$ (μ — любое), то ряд (1) расходится;

3) если $\lambda = 1$, а $\mu > 1$, то ряд (1) сходится;

4) если $\lambda = 1$, а $\mu \le 1$, то ряд (1) расходится.

▶ α) Пусть $\lambda \ne 1$. Из (11) следует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$ (при любом μ) $\Rightarrow$ по признаку Даламбера ряд (1) сходится, если $\lambda > 1$ (μ — любое), и расходится, если $\lambda < 1$ (μ — любое).

β) Пусть $\lambda = 1$, а $\mu \ne 1$. В этом случае соотношение (11) имеет вид

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^\alpha} \;\Rightarrow\; \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^\alpha} \;\Rightarrow\; n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n^{\alpha-1}},$$

$$\text{т.е.}\quad R_n = \mu + \frac{\theta_n}{n^{\alpha-1}} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} R_n = \mu .$$

По признаку Раабе заключаем: ряд (1) сходится, если $\mu > 1$ ($\lambda = 1$) и расходится, если $\mu < 1$ ($\lambda = 1$).

γ) Пусть $\lambda = 1$, $\mu = 1$. В этом случае соотношение (11) имеет вид

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^\alpha} \quad \Rightarrow \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 = \frac{\theta_n}{n^{\alpha-1}} \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ после умножения обеих частей равенства на $\ln n$ получаем

$$\ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \frac{\theta_n \cdot \ln n}{n^{\alpha-1}}, \text{ т.е. } B_n = \frac{\theta_n \cdot \ln n}{n^{\alpha-1}}. \qquad (12)$$

Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = 0 \Rightarrow$ в частности, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha-1}} = 0$. А тогда из (12) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$ (< 1).

Значит, ряд (1) расходится, если $\lambda = 1$, $\mu = 1$. ◀

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \cdot \frac{1}{n^q}. \qquad (13)$$

▶ Имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{(2n-1)!! \cdot (2n+2)!!}{(2n)!! \cdot (2n+1)!!}\right]^p \cdot \frac{1}{n^q} \cdot (n+1)^q \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^q = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q.$$

По формуле Тейлора

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{1}{2!}\frac{p(p-1)}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q}{n} + \frac{1}{2!}\frac{q(q-1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

А тогда

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q =$$

$$= 1 + \frac{q}{n} + \frac{p}{2n+1} + \frac{1}{2}\frac{q(q-1)}{n^2} + \frac{pq}{n(2n+1)} + \frac{1}{2}\frac{p(p-1)}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

так как $\frac{p}{2n+1} = \frac{\frac{p}{2}}{n} - \frac{\frac{p}{2}}{n(2n+1)}$, то

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q + \frac{p}{2}}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где θ_n — ограниченная переменная. Итак, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{q + \frac{p}{2}}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$.

По признаку Гаусса ряд (13) сходится, если $q + \frac{p}{2} > 1$, и расходится, если $q + \frac{p}{2} \le 1$.

Замечание. Из признака Куммера были получены признаки Даламбера, Раабе, Бертрана. Следует отметить, что эта цепочка все более и более тонких признаков может быть продолжена.

§5. Признак Коши

Теорема 1. Пусть имеется положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

1. Если начиная с некоторого места, т.е. для $n > N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$) оказывается $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то ряд (1) расходится.

2. Если начиная с некоторого места, т.е. для $n > N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$) оказывается $\sqrt[n]{a_n} \le q$, где $0 < q < 1$, то ряд (1) сходится.

▶ 1. По условию, $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$ $\Rightarrow$ $a_n \ge 1$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$ $\Rightarrow$ a_n не может стремиться к нулю при $n \to \infty$ $\Rightarrow$ ряд (1) расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

2. По условию, $\sqrt[n]{a_n} \le q$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$ $\Rightarrow$ $a_n \le q^n$, для любого $n \in \mathbf{N}$, $n > N_*$, т.е.

$$a_{N_*+1} \le q^{N_*+1}; \quad a_{N_*+2} \le q^{N_*+2}; \quad \dots .$$

Но ряд $q^{N_*+1} + q^{N_*+2} + \dots$ — геометрический, сходящийся, так как $0 < q < 1$. А тогда по первому признаку сравнения будет сходиться ряд $a_{N_*+1} + a_{N_*+2} + \dots$, а значит, будет сходиться ряд (1) (если сходится остаток ряда после N_*-го члена, то сходится и сам ряд). ◀

Теорема 2 (признак Коши в предельной форме).

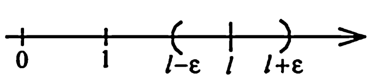
Пусть имеется положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{1}$$

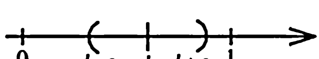
Пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:

1) если $l > 1$, то ряд (1) расходится;
2) если $l < 1$, то ряд (1) сходится.

▶ 1а) Пусть $l > 1$, конечное. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, но такое, что $l - \varepsilon > 1$. По условию $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_*, такой, что $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$, если $n > N_*$ $\Rightarrow$ в частности, $\sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon$ (> 1), если $n > N_*$ $\Rightarrow$ по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится.



1б) Пусть $l = +\infty$. По условию, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$ $\Rightarrow$ любому числу $M > 1$ отвечает номер N_* такой, что будет $\sqrt[n]{a_n} > M$ (> 1), если $n > N_*$ $\Rightarrow$ по теореме 1 заключаем, что ряд (1) расходится.



2) Пусть $0 \le l < 1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, но такое, что $l + \varepsilon < 1$. По условию $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_*, такой, что $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$, если $n > N_*$ $\Rightarrow$ в частности, $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$ (< 1), если $n > N_*$. А тогда по теореме 1 заключаем, что ряд (1) сходится. ◀

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то признак Коши не дает ответа на вопрос о поведении ряда (1).

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^n}. \tag{2}$$

▶ Имеем $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{(n)^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \dfrac{e^{\frac{\ln n}{n}\cdot \ln n}}{\ln n} = \dfrac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[(\ln x)^2\right]'_x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'_x}{1} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{(\ln n)^2}{n}} = 1$. А тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n} = 0 \ (<1) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (2) сходится. ◀

§6. Знакочередующиеся ряды

Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется знакочередующимся, если оказывается

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0, \quad \text{для любого } n \in \mathrm{N},$$

т.е. если соседние члены ряда имеют различные знаки.

Станем обозначать через a_n абсолютную величину n-го члена ряда. Пусть для определенности первый член ряда положительный. Тогда знакочередующийся ряд запишется в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n. \tag{1}$$

Для знакочередующихся рядов имеется достаточно общий и практически удобный признак сходимости, принадлежащий Лейбницу.

Теорема (признак Лейбница). Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают, т.е.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots , \tag{2}$$

и если

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 , \tag{3}$$

то ряд (1) сходится.

▶ Рассмотрим сначала частичную сумму ряда (1), содержащую четное число членов

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Запишем выражение для s_{2n} в виде

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \tag{4}$$

(сумма s_{2n} содержит конечное число слагаемых, и потому основные законы действий справедливы здесь без каких-либо ограничений). Каждое слагаемое в правой части выражения для s_{2n} неотрицательно. Следовательно, последовательность $\{s_{2n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ — неубывающая.

Запишем теперь выражение для s_{2n} в виде

$$s_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2n}}_{>0} . \tag{5}$$

Из (5) ясно, что $s_{2n} \leq a_1$, для любого $n \in \mathrm{N}$. Значит, $\{s_{2n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ — последовательность, ограниченная сверху.

Так как последовательность $\{s_{2n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ — неубывающая и ограниченная сверху, то существует конечный предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} . \tag{6}$$

Рассмотрим теперь частичную сумму ряда (1), содержащую нечетное число членов.

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} .$$

Оба предела справа существуют, причем второй из них по условию равен нулю. Значит, существует и предел слева, и для него

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s\,. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ без всяких оговорок относительно четности или нечетности индекса n. Следовательно, ряд (1) сходится. ◀

Замечание 1. Пусть ряд (1) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница и пусть s — сумма этого ряда. Из доказательства теоремы следует, что последовательность $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ стремится при $n\to\infty$ к s, монотонно возрастая. Следовательно, $s_{2n} \le s$, для любого $n\in\mathbb{N}$. Имеем, далее,

$$s_1 = a_1\,,$$

$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\ge 0} = s_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\ge 0} \;\Rightarrow\; s_1 \ge s_3\,,$$

$$s_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_3 - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\ge 0} \;\Rightarrow\; s_3 \ge s_5\,,$$

и так далее. Получаем, таким образом,

$$s_1 \ge s_3 \ge s_5 \ge \ldots \ge s_{2n-1} \ge \ldots\,,$$

т.е. последовательность $\{s_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ стремится при $n\to\infty$ к s, монотонно убывая. Следовательно, $s_{2n-1} \ge s$ для любого $n\in\mathbb{N}$.

Итак, имеем

$$s_{2n} \le s \le s_{2n-1}\,, \text{ для любого } n\in\mathbb{N}\,. \tag{8}$$

В частности, при $n = 1$ будет $\underbrace{a_1 - a_2}_{\ge 0} \le s \le a_1 \;\Rightarrow\; 0 \le s \le a_1$. Значит, сумма s знакочередующегося ряда (1), удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак первого члена ряда, и абсолютная величина этой суммы не превосходит абсолютной величины первого члена.

Замечание 2 (об оценке суммы остатка ряда).

Пусть знакочередующийся ряд (1) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Рассмотрим сначала остаток ряда (1) после $2m$-го члена. Обозначим сумму этого остатка через σ.

$$\sigma = a_{2m+1} - a_{2m+2} + a_{2m+3} - a_{2m+4} + \ldots\,.$$

По замечанию 1 имеем: $0 \le \sigma \le a_{2m+1}$. Видим, что

1) сумма σ остатка ряда имеет знак первого члена остатка, и

2) $|\sigma| \le a_{2m+1}$, т.е. абсолютная величина суммы остатка не превосходит абсолютной величины первого члена этого остатка.

Рассмотрим теперь остаток ряда (1) после $(2m-1)$-го члена. Обозначим сумму этого остатка через $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = -a_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} + \ldots = -(a_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} - \ldots).$$

Пусть

$$\tilde{\sigma}_* = a_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} - \ldots, \tag{9}$$

а тогда

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{\sigma}_*. \tag{10}$$

Замечаем, что ряд (9) — знакочередующийся и удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Первый член ряда (9) — положительный. Поэтому, по доказанному выше, будем иметь:

1) $\tilde{\sigma}_* > 0$;

2) $|\tilde{\sigma}_*| \le a_{2m}$.

Но тогда:

1) $\tilde{\sigma} < 0$ (так как $\tilde{\sigma} = -\tilde{\sigma}_*$);

2) $|\tilde{\sigma}| = |-\tilde{\sigma}_*| = |\tilde{\sigma}_*| \le a_{2m}$.

Следовательно, и в этом случае имеем:

1) сумма $\tilde{\sigma}$ остатка ряда имеет знак первого члена остатка;

2) $|\tilde{\sigma}| \le a_{2m}$, т.е. абсолютная величина суммы остатка не превосходит абсолютной величины первого члена остатка.

Замечание 3. Следует помнить, что в признаке сходимости Лейбница ряд должен удовлетворять трем условиям:

1) знакочередуемость членов ряда,

2) монотонное убывание абсолютных величин членов ряда, т.е. $a_n \ge a_{n+1}$, для всех $n \in \mathbf{N}$,

3) стремление к нулю абсолютной величины общего члена ряда при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Каждое из этих условий подлежит обязательной проверке. Рассмотрим пример.

Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}. \qquad (11)$$

Видим, что ряд (11) — знакочередующийся и что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0$. Однако условие $a_n \geq a_{n+1}$ выполнено не для всех $n \in \mathbf{N}$. В самом деле, имеем

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+2\cdot(-1)^{n+1}}{\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)\left(\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1}\right)}.$$

Так как знаменатель последней дроби положительный, то имеет смысл рассматривать лишь числитель этой дроби. Имеем

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+2\cdot(-1)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+2\cdot(-1)^{n+1}.$$

Приходим к выводу: $a_n - a_{n+1} < 0$, если n — четное, и $a_n - a_{n+1} > 0$, если n — нечетное. Значит, абсолютные величины членов ряда (11) убывают не монотонно.

Покажем теперь, что ряд (11) расходится. Действительно, имеем

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n\cdot\left[\sqrt{n}-(-1)^n\right]}{n-1} = (-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Значит, ряд (11) можно рассматривать как разность рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot\tilde{a}_n \qquad (12)$$

и

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}. \qquad (13)$$

Ряд (12):

1) знакочередующийся;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)} = 0$;

3) $\tilde{a}_n - \tilde{a}_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} - \dfrac{\sqrt{n+1}}{n} = \dfrac{n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n+1}}{n(n-1)} =$

$$= \frac{n^2 \cdot n - (n-1)^2(n+1)}{n(n-1)\left[n\sqrt{n} + (n-1)\sqrt{n+1}\right]}.$$

Так как знаменатель положителен при всех натуральных $n \geq 2$, то следует рассмотреть лишь числитель. Имеем

$$n^3 - (n-1)(n^2-1) = n^3 - n^3 + n + n^2 - 1 = n^2 + n - 1 > 0,$$

для всех $n \in \mathbf{N}$. Значит, $\tilde{a}_n > \tilde{a}_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Вывод: ряд (12) удовлетворяет всем трем условиям признака сходимости Лейбница $\Rightarrow$ ряд (12) сходится.

Ряд (13) — гармонический $\Rightarrow$ ряд (13) расходится.

Но тогда расходится и ряд (11). В самом деле, если предположить, что ряд (11) сходится, то тогда должен сходиться и ряд (13) (как разность двух сходящихся рядов (12) и (11)), а это не так.

§7. Ряды с членами любых знаков

В этом параграфе рассматриваются знакопеременные ряды общего вида, когда знаки членов ряда не обязательно чередуются (или знаки чередуются, но теорема Лейбница неприменима из-за немонотонного убывания абсолютных величин членов ряда).

1°. Общий признак сходимости рядов (критерий Коши).

Будем опять записывать ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Здесь через a_n обозначен n-й член ряда вместе со своим знаком.

Мы знаем, что сходимость ряда (1) равносильна сходимости последовательности его частичных сумм

$$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}. \tag{2}$$

Но для сходимости последовательности (2) необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N, такой, что как только $n > N$ и $m > N$, так сейчас же $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Пусть для определенности $m > n$ $(n > N)$. Положим $m = n + p$, $p \in \mathbf{N}$. Тогда

$$s_m - s_n = s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}.$$

Получаем, следовательно:

Для того, чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Это и есть общий признак (критерий Коши) сходимости рядов.

2°. Абсолютная сходимость и условная сходимость.

Наряду с рядом (1) рассмотрим еще ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3}$$

(ряд (3) составлен из модулей членов ряда (1)).

Определение. Ряд (1) с членами любых знаков называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд (3), составленный из модулей членов ряда (1).

Теорема 1. Абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

▶ По условию, ряд (1) абсолютно сходящийся. Это означает, что сходится ряд (3). Но тогда по критерию Коши любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Так как $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|$, то при $n > N$ будет

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Получаем, следовательно: любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad p \in \mathbf{N}.$$

Последнее означает (по критерию Коши), что ряд (1) сходится. ◀

Замечание. Доказанная теорема необратима. Может оказаться, что ряд (1) с членами разных знаков сходится, а ряд (3), составленный из модулей членов ряда (1), расходится.

Так, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$ сходится (он — знакочередующийся, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница). Ряд же, составленный из модулей членов этого ряда, а именно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, расходится (это гармонический ряд).

Определение. Ряд (1) с членами разных знаков называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд (3), составленный из модулей членов ряда (1), расходится.

Изложенное выше приводит к разделению всех сходящихся рядов на два класса: ряды абсолютно сходящиеся и ряды условно сходящиеся.

Отметим, что все сходящиеся *положительные* ряды входят в класс абсолютно сходящихся рядов.

§8. О перестановке членов в сходящихся рядах

Лемма. Если положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{1}$$

сходится, то его члены можно переставлять произвольным образом. От этого сходимость ряда не нарушится, и величина его суммы не изменится.

▶ По условию, ряд (1) сходится. Пусть s — сумма этого ряда. Переставим в ряде (1) его члены произвольным образом. Получим ряд

$$a_{n_1}+a_{n_2}+\ldots+a_{n_k}+\ldots\ . \tag{2}$$

Обозначим через s_n n-ю частичную сумму ряда (1), а через σ_k k-ю частичную сумму ряда (2). Имеем

$$\sigma_k=a_{n_1}+a_{n_2}+\ldots+a_{n_k}\ .$$

Положим $p=\max\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}$ и рассмотрим s_p, т.е. p-ю частичную сумму ряда (1). Нетрудно понять, что все слагаемые, входящие в состав σ_k, войдут также и в состав s_p. Поэтому будет $\sigma_k\le s_p$. У нас ряд (1) положительный, и его сумма равна s. Но тогда $s_p\le s$ для любого $p\in\mathrm{N}$, а следовательно, и подавно

$$\sigma_k \le s, \text{ для любого } k \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Заметим, что последовательность $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ — неубывающая и ограниченная сверху. Следовательно, существует конечный предел

$$\sigma = \lim_{k\to\infty} \sigma_k .$$

А значит, ряд (2) сходится и σ — сумма этого ряда.

У нас $\sigma_k \le s$, для любого $k \in \mathbf{N}$ (см. (3)). Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\sigma \le s. \tag{4}$$

Видим, что от перестановки членов в положительном сходящемся ряде его сумма не увеличивается. Но тогда она не может и уменьшиться, ибо в противном случае обратная перестановка членов приводила бы к увеличению суммы ряда, что невозможно. Значит, $\sigma = s$. Лемма доказана. ◀

Теорема. Члены абсолютно сходящегося ряда можно произвольным образом менять местами. От этого абсолютная сходимость ряда не нарушается и величина его суммы не изменяется.

▶ Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

— абсолютно сходящийся. Значит, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . \tag{$\tilde{5}$}$$

Переставим в ряде (5) его члены произвольным образом. Получим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} + \ldots . \tag{6}$$

Нужно показать, что ряд (6) — абсолютно сходящийся, т.е. что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{n_k}\right| , \tag{$\tilde{6}$}$$

и что сумма ряда (6) равна сумме ряда (5).

Заметим, что ряд ($\tilde{6}$) получается из ряда ($\tilde{5}$) той же перестановкой членов, что и ряд (6) из ряда (5). Так как ряд ($\tilde{5}$) —

положительный, сходящийся, то по лемме ряд ($\tilde{6}$) тоже сходится. А это означает, что ряд (6) сходится, и притом абсолютно.

Остается показать, что сумма ряда (6) равна сумме ряда (5).

Положим $b_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$; $c_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$. Ясно, что

$$b_n = a_n, \text{ если } a_n > 0; \quad b_n = 0, \text{ если } a_n < 0;$$

$$c_n = 0, \text{ если } a_n > 0; \quad c_n = -a_n \ (> 0), \text{ если } a_n < 0.$$

Значит, $b_n \geq 0$ и $c_n \geq 0$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{7}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{8}$$

— положительные. Кроме того, ряды (7) и (8) — сходящиеся: первый — как полусумма, а второй — как полуразность двух сходящихся рядов (а именно рядов ($\tilde{5}$) и (5)).

Введем в рассмотрение ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} \tag{9}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k}. \tag{10}$$

Ряд (9) получается из ряда (7), а ряд (10) получается из ряда (8) той же перестановкой членов, что и ряд (6) из ряда (5). Отметим, что

$$\left.\begin{aligned} b_n - c_n &= a_n, \\ b_{n_k} - c_{n_k} &= a_{n_k}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Так как ряды (7), (8) — положительные, сходящиеся, то по лемме сумма ряда (9) равна сумме ряда (7), а сумма ряда (10) равна сумме ряда (8). Значит, сумма разности рядов (9) и (10) будет равна сумме разности рядов (7) и (8). А тогда, принимая во внимания соотношения (11), заключаем, что сумма ряда (6) равна сумме ряда (5). ◀

Замечание. В рядах, сходящихся условно, перестановка членов ряда недопустима. Перестановка членов в таких рядах может изменить сумму ряда или даже привести к нарушению сходимости ряда.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} \quad \left(=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right). \tag{12}$$

Выше было показано, что ряд (12) сходится, но не абсолютно.

Поменяем местами члены в ряде (12), расположив за каждым положительным членом два отрицательных. Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots\,. \tag{13}$$

Обозначим n-ю частичную сумму ряда (12) через s_n, а k-ю частичную сумму ряда (13) — через σ_k. Имеем

$$\sigma_{3n}=\underbrace{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}}-\frac{1}{4n}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}s_{2n}\,.$$

Пусть s — сумма ряда (12). Отметим, что $0<s<1$ (см. замечание 1 “Об оценке суммы знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница”). Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\frac{1}{2}s\,.$$

Имеем далее

$$\sigma_{3n+1}=\sigma_{3n}+\frac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}s\,,$$

$$\sigma_{3n+2}=\sigma_{3n+1}-\frac{1}{4n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}s\,.$$

Значит, $\sigma_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{2}s$, без всяких оговорок относительно индекса k. Последнее означает, что ряд (13) сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}s$.

Так как $s\neq 0$, то заключаем: перестановка местами членов ряда (12) привела к изменению суммы ряда.

§9. Умножение абсолютно сходящихся рядов

Пусть имеются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n + \ldots \tag{2}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{где} \quad c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 \tag{3}$$

называется произведением рядов (1) и (2). В развернутом виде ряд (3) записывается так:

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots +$$

$$+ (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) + \ldots$$

Теорема Коши. Если ряды (1) и (2) сходятся абсолютно, то ряд (3) тоже абсолютно сходится. При этом если A, B, C есть суммы рядов (1), (2), (3) соответственно, то $C = A \cdot B$.

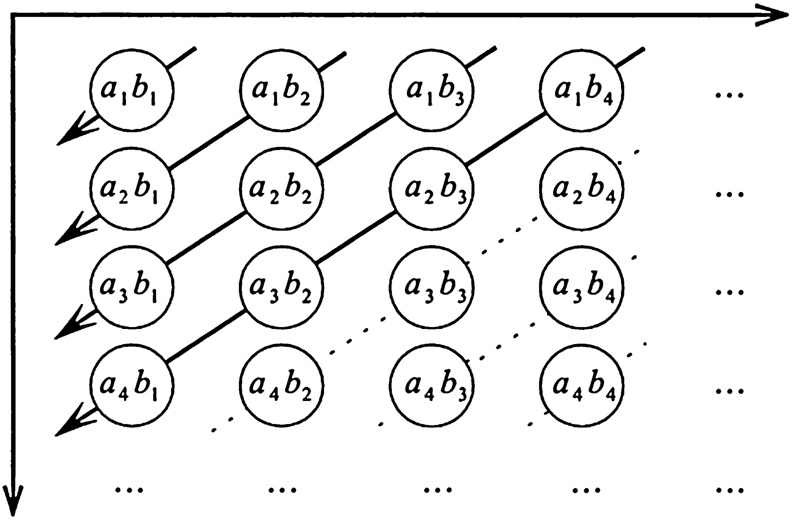
▶ Рассмотрим бесконечную прямоугольную матрицу

$$\begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \ldots & a_1 b_n & \ldots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \ldots & a_2 b_n & \ldots \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \ldots & a_3 b_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_3 & \ldots & a_n b_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \tag{M}$$

Элементы матрицы (М) различными способами можно расположить в форме последовательностей. Если затем члены этих последовательностей соединять знаком “+”, то будем получать различные ряды. Все эти ряды будут отличаться друг от друга лишь порядком расположения их членов.

Рассмотрим два способа расположения элементов матрицы (М) в форме последовательностей.

1. По “диагонали”:

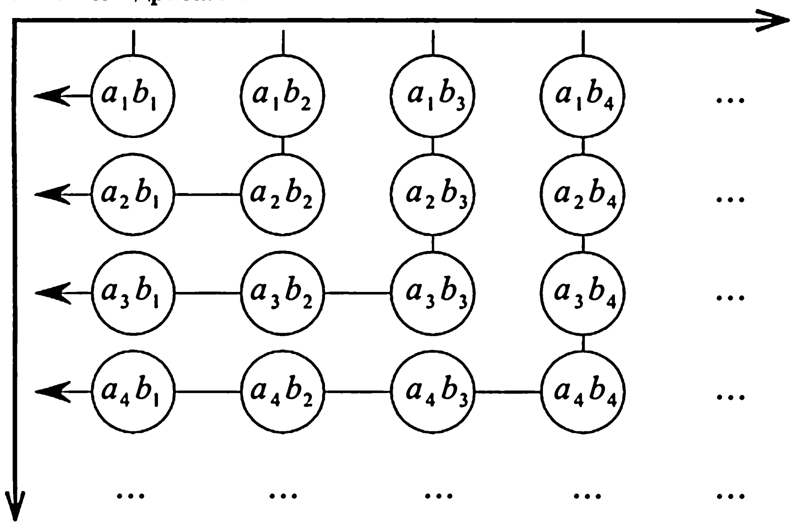


Такой схеме соответствует ряд

$$\underbrace{a_1b_1} + \underbrace{a_1b_2 + a_2b_1} + \underbrace{a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1} + \ldots \qquad (4)$$

Заметим, что ряд (3) получается из ряда (4) объединением его членов в группы из одного, затем из двух, затем из трех членов и т. д.

2. По “квадратам”:



Такой схеме соответствует ряд

$$a_1b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1+\ldots \tag{5}$$

Подчеркнем еще раз, что ряды (4) и (5) отличаются друг от друга лишь порядком расположения своих членов.

Покажем, что ряд (5) сходится абсолютно, т.е. что сходится ряд

$$|a_1b_1|+|a_1b_2|+|a_2b_2|+|a_2b_1|+|a_1b_3|+|a_2b_3|+|a_3b_3|+|a_3b_2|+|a_3b_1|+\ldots \tag{$\tilde{5}$}$$

Для этого возьмем любую частичную сумму ряда $(\tilde{5})$. Нетрудно понять, что при достаточно большом n все слагаемые этой частичной суммы будут содержаться в сумме

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n = {} & |a_1b_1|+|a_1b_2|+|a_1b_3|+\ldots+|a_1b_n|+\\ & +|a_2b_1|+|a_2b_2|+|a_2b_3|+\ldots+|a_2b_n|+\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ & +|a_nb_1|+|a_nb_2|+|a_nb_3|+\ldots+|a_nb_n|.\end{aligned}$$

Имеем $\tilde{Q}_n=\tilde{A}_n\cdot\tilde{B}_n$, где $\tilde{A}_n=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$, $\tilde{B}_n=|b_1|+|b_2|+$ $+\ldots+|b_n|$ есть n-е частичные суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{$\tilde{1}$}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \tag{$\tilde{2}$}$$

соответственно. Заметим, что ряды $(\tilde{1})$ и $(\tilde{2})$ — положительные, сходящиеся (ибо по условию ряды (1) и (2) сходятся абсолютно).

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ есть суммы рядов $(\tilde{1})$, $(\tilde{2})$ соответственно. Тогда для любого $n\in\mathbf{N}$: $\tilde{A}_n\le\tilde{A}$, $\tilde{B}_n\le\tilde{B}$ $\Rightarrow$ $\tilde{A}_n\cdot\tilde{B}_n\le\tilde{A}\cdot\tilde{B}$, т.е. $\tilde{Q}_n\le\tilde{A}\cdot\tilde{B}$. Следовательно, и подавно любая частичная сумма ряда $(\tilde{5})$ будет $\le\tilde{A}\cdot\tilde{B}$.

Итак, имеем: последовательность частичных сумм ряда $(\tilde{5})$ монотонна и ограничена сверху. Значит, она имеет конечный предел, и, следовательно, ряд $(\tilde{5})$ сходится. Но тогда ряд (5) сходится, и притом абсолютно.

У нас ряд (4) получается из ряда (5) некоторой перестановкой членов. Значит, ряд (4) тоже абсолютно сходится. Отметим также, что ряды (4) и (5) имеют одну и ту же сумму. Обозначим ее через s.

Было замечено ранее, что ряд (3) получается из ряда (4) объединением его членов в группы из одного, из двух, затем из трех членов и т. д. Значит, ряд (3) тоже сходится, и его сумма C равна s.

Было установлено выше, что ряд (4) сходится абсолютно, т.е. что сходится ряд

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_1| + |a_1b_3| + |a_2b_2| + |a_3b_1| + \ldots \qquad (\tilde{4})$$

Объединим члены ряда $(\tilde{4})$ в группы из одного, затем из двух, трех членов и т. д. Получим сходящийся ряд

$$|a_1b_1| + \left(|a_1b_2| + |a_2b_1|\right) + \left(|a_1b_3| + |a_2b_2| + |a_3b_1|\right) + \ldots \qquad (\tilde{\tilde{4}})$$

Так как модули членов ряда (3) не превосходят соответствующих членов ряда $(\tilde{\tilde{4}})$, то ряд, составленный из модулей членов ряда (3), сходится. А это означает, что ряд (3) сходится абсолютно. Выше было доказано, что сумма ряда (3) равна s (она равна суммам рядов (4) и (5)).

Остается показать, что $s = A \cdot B$.

Для этого снова возвратимся к ряду (5). Объединим члены ряда (5) в группы из одного, затем из трех, затем из пяти членов и т. д. Получим ряд

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \ldots \qquad (6)$$

Ясно, что ряд (6) сходится и его сумма равна s. Пусть T_n — n-я частичная сумма ряда (6). Легко видеть, что $T_n = A_n \cdot B_n$, где A_n и B_n — n-е частичные суммы рядов (1) и (2) соответственно. У нас ряды (1) и (2) сходятся, и их суммы равны соответственно A и B. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = A \cdot B,$$

т.е.

$$s = A \cdot B. \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Если ряды (1) и (2) сходятся, но не абсолютно, то их произведение, т.е. ряд (3), может оказаться даже расходящимся. Убедимся в этом на примере.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ряд-произведение будет таким:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right).$$

Заметим, что ряды-сомножители есть ряды знакочередующиеся, удовлетворяющие условиям теоремы Лейбница и, следовательно, сходящиеся. Но они сходятся не абсолютно, так как ряды, составленные из модулей их членов, расходятся.

Имеем

$$|c_n| = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right) \geq$$

$$\geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}_{\text{всего } n \text{ слагаемых}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1, \text{ для любого } n \in \mathrm{N}$$

$\Rightarrow$ c_n не может стремиться к нулю при $n \to \infty$. Значит, ряд-произведение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Замечание 2. Справедливы следующие утверждения (принимаем их без доказательств).

1. Если ряды (1) и (2) сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно, то ряд-произведение (3) сходится. При этом если A, B, C есть суммы рядов (1), (2) (3) соответственно, то $C = A \cdot B$.

(Это — теорема Мертенса. В ней не гарантируется абсолютная сходимость ряда (3), если из рядов (1), (2), только один оказывается абсолютно сходящимся.)

2. Пусть ряды (1) и (2) сходятся, и оба сходятся лишь условно. Тогда, если ряд-произведение (3) оказывается сходящимся, то между суммами A, B, C рядов (1), (2), (3) существует связь $C = A \cdot B$.

(Это — теорема Абеля.)

Все изложенное в §8 и §9 показывает, что абсолютно сходящиеся ряды обладают некоторыми основными свойствами конечных сумм; для рядов неабсолютно сходящихся эти свойства, вообще говоря, не имеют места.

Напомним эти свойства.

1. Сходимость и сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяются при произвольной перестановке его членов. Иначе говоря, для абсолютно сходящихся рядов справедлив переместительный закон сложения.

2. Два абсолютно сходящихся ряда можно перемножать как обыкновенные многочлены, т.е. каждый член одного ряда умножать на каждый член другого и результаты складывать в любом порядке; получающийся ряд тоже абсолютно сходящийся.

3. Для абсолютно сходящегося ряда остается в силе свойство: "абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых": $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (для доказательства достаточно взять неравенство $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ и перейти в нем к пределу при $n \to \infty$).

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ к ряду, составленному из модулей членов этого ряда, могут быть применены все признаки сходимости, установленные для положительных рядов. Но нужно быть осторожным с признаками расходимости. Было отмечено: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ оказывается расходящимся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может все же сходиться (условно).

Установим достаточные признаки условной сходимости для некоторого вида знакопеременных рядов, не являющихся абсолютно сходящимися.

§10. Признаки сходимости рядов Дирихле и Абеля

1°. Преобразование Абеля.

Рассмотрим сумму парных произведений вида

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_m\beta_m . \qquad (1)$$

Положим

$$B_1=\beta_1,\ B_2=\beta_1+\beta_2,\ B_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\dots,B_m=\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m \Rightarrow$$

$$\beta_1=B_1,\ \beta_2=B_2-B_1,\ \beta_3=B_3-B_2,\ \dots,\ \beta_m=B_m-B_{m-1}.$$

Тогда сумму (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_1\cdot B_1+\alpha_2\left(B_2-B_1\right)+\alpha_3\left(B_3-B_2\right)+\dots+\alpha_m\left(B_m-B_{m-1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=(\alpha_1-\alpha_2)B_1+(\alpha_2-\alpha_3)B_2+\dots+(\alpha_{m-1}-\alpha_m)B_{m-1}+\alpha_m B_m. \tag{2}$$

(2) — так называемое тождество Абеля.

Опираясь на формулу (2), выведем следующую оценку для сумм вида (1):

Лемма. Если множители α_i не возрастают, т.е. $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\alpha_3\geq\geq\dots\geq\alpha_m$ (или не убывают, т.е. $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha_3\leq\dots\leq\alpha_m$) и если абсолютные величины сумм B_i $(i=1,2,\dots,m)$ ограничены одним и тем же числом $L>0$, т.е. $|B_i|\leq L$ $(i=1,2,\dots,m)$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\leq L\left(|\alpha_1|+2|\alpha_m|\right). \tag{3}$$

▶ Имеем из (2):

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\leq|\alpha_1-\alpha_2||B_1|+|\alpha_2-\alpha_3||B_2|+\dots+|\alpha_{m-1}-\alpha_m||B_{m-1}|+|\alpha_m||B_m|\leq$$

$$\leq L\left(|\alpha_1-\alpha_2|+|\alpha_2-\alpha_3|+\dots+|\alpha_{m-1}-\alpha_m|+|\alpha_m|\right).$$

Так как разности $(\alpha_1-\alpha_2)$, $(\alpha_2-\alpha_3)$, ... , $(\alpha_{m-1}-\alpha_m)$ все одного знака, то будем иметь $\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\leq L\left(|\alpha_1-\alpha_m|+|\alpha_m|\right)\leq L\left(|\alpha_1|+2|\alpha_m|\right)$. ◀

Важно обратить внимание на то, что в неравенстве (3) оценка рассматриваемой суммы дается через первый и последний ее члены и не зависит от числа слагаемых в этой сумме.

Приступим теперь к выводу признаков сходимости рядов Дирихле и Абеля.

2°. Теорема 1 (признак Дирихле).

Пусть имеется ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k . \tag{4}$$

Рассмотрим две последовательности:

$$\{v_k\}_{k\in N} \tag{5}$$

и

$$\{s_k\}_{k\in N} \tag{6}$$

($s_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, т.е. s_k — k-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$). Тогда, если

1) последовательность (5) — монотонно убывающая и такая, что $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ($\Rightarrow v_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$), и если

2) последовательность (6) — ограниченная, т.е. существует число $M > 0$ такое, что $|s_k| \le M$, $k \in \mathrm{N}$, то ряд (4) сходится.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Мы докажем, что ряд (4) сходится, если покажем, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$ при любом $p \in \mathrm{N}$ (см. критерий Коши сходимости числовых рядов). Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{i=1}^{p} u_{n+i} v_{n+i} . \tag{7}$$

Сумма (7) имеет вид (1), если положить в ней $\beta_i = u_{n+i}$, $\alpha_i = v_{n+i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Попытаемся оценить сумму (7) с помощью леммы. Имеем

$$|\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n| \le |s_{n+p}| + |s_n| \le 2M$$

при любом $p \in \mathrm{N}$, ибо $|s_k| \le M$ при любом $k \in \mathrm{N}$ ($2M$ выступает в роли числа L). По условию $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что как только $k > N$, так сейчас же $v_k < \dfrac{\varepsilon}{6M}$. По лемме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} u_{n+i} v_{n+i}\right| \le 2M\left(\left|v_{n+1}\right| + 2\left|v_{n+p}\right|\right) = 2M\left(v_{n+1} + 2v_{n+p}\right),$$

при любом $p \in \mathrm{N}$. Следовательно, при $n > N$ будем иметь $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < 2M\dfrac{3\varepsilon}{6M} = \varepsilon$ при любом $p \in \mathrm{N}$.

Таким образом, показано, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$ при любом $p \in \mathrm{N}$. Значит, ряд (4) сходится.

3°. Теорема 2 (признак Абеля).

Пусть имеется ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k . \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность

$$\{v_k\}_{k \in N} \tag{5}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k . \tag{8}$$

Тогда, если

1) ряд (8) сходится и

2) последовательность (5) монотонная и ограниченная, т.е. существует число $M > 0$, такое, что $|v_k| \le M$ при любом $k \in \mathrm{N}$, то ряд (4) сходится.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Мы докажем, что ряд (4) сходится, если покажем, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$ при любом $p \in \mathrm{N}$.

И здесь отмечаем, что $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{i=1}^{p} u_{n+i} v_{n+i}$. По условию ряд (8) сходится. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$

при любом $p \in \mathbb{N}$ (см. критерий Коши сходимости числовых рядов). В обозначениях, принятых в лемме: $|B_i| < \frac{\varepsilon}{3M}$, $i = 1, 2, \dots, p$; ($\frac{\varepsilon}{3M}$ выступает в роли числа $L > 0$). По лемме $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} u_{n+i} v_{n+i}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|v_{n+1}| + 2|v_{n+p}|\right)$, если $n > N$, а p — любое натуральное. Но $|v_{n+1}| \le M$; $|v_{n+p}| \le M$. Следовательно, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$, если $n > N$, а $p \in \mathbb{N}$ — любое $\Rightarrow$ ряд (4) сходится. ◀

Замечание. Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле.

Действительно, в признаке Лейбница рассматривается ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} a_k$, в котором $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n \ge \dots$ и $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Положим $u_k = (-1)^{k-1}$, $v_k = a_k$. Имеем $|s_k| = |u_1 + u_2 + \dots + u_k| = \left|1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{k-1}\right| \le 1$, $k \in \mathbb{N}$; $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — монотонно убывающая и такая, что $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Видим, что условия признака Дирихле выполнены. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} a_k$ сходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{9}$$

▶ При $x = 0$ и $x = 2\pi$ ряд (9) принимает вид $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Это гармонический ряд. Мы знаем, что он расходится. Значит, ряд (9) расходится в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$. Выберем теперь и закрепим любое $x \in (0, 2\pi)$. Положим $u_k = \cos kx$, $k = 1, 2, \dots$; $v_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$. Последовательность $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ — монотонно убывающая и такая, что $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. У нас $u_k(x) = \cos kx$. Значит

$s_k = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos kx$. Умножим обе части последнего равенства на $2\sin\frac{x}{2}$. Получим

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot s_k = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x +$$

$$+ 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos kx.$$

Так как $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta+\alpha) - \sin(\beta-\alpha)$, то будем иметь

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot s_k = \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\sin\frac{(2k+1)x}{2} - \sin\frac{(2k-1)x}{2}\right) = \sin\frac{(2k+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}.$$

У нас $x \in (0, 2\pi)$. Значит, $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. А тогда

$$s_k = \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad |s_k| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbf{N}$$

$\Rightarrow$ $\{s_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ — ограниченная, для любого закрепленного x из $(0, 2\pi)$. Таким образом, при любом закрепленном x из $(0, 2\pi)$ ряд (6) удовлетворяет условиям признака Дирихле. Значит ряд (6) сходится при любом x из $(0, 2\pi)$. ◀

Глава 6

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§1. Последовательности функций

1°. Пусть имеется последовательность функций, заданных на множестве $X = \{x\}$

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad x \in X. \tag{1_0}$$

Пусть $E \subset X$. Пусть при каждом закрепленном x из E последовательность (1_0) имеет конечный предел. Ясно, что этот предел будет представлять собой функцию от x, определенную на множестве E.

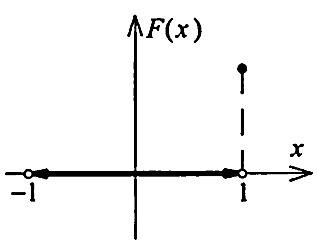


Рис. 6.1. К примеру 1. График функции $y = F(x)$

Будем обозначать этот предел через $F(x)$ и называть предельной функцией последовательности (1_0) на множестве E. Запись:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E. \tag{2}$$

Пример 1. Для последовательности $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$X = (-\infty, +\infty); \quad E = (-1, 1];$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Пример 2. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$ задана на промежутке $[0,1]$ графически (см. рис. 6.2).

В этом примере $F(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$. В самом деле, в точке $x=0$ имеем $f_n(0)=0$, для любого $n\in\mathrm{N}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$. Выберем и закрепим теперь любую точку $x_0\in(0,1]$. Всегда можно указать $n_0\in\mathrm{N}$, такое, что будет $\dfrac{1}{n_0}<x_0$ и, следовательно, будет $f_n(x_0)=0$, для любого $n\ge n_0$ ($n\in\mathrm{N}$) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$. Так как точка x_0 — любая, принадлежащая $(0,1]$, то получаем $F(x)=0$, для любого $x\in(0,1]$. Было отмечено выше, что $F(0)=0$. Следовательно, $F(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$.

Пусть последовательность (1_0) сходится на множестве E. Пусть $F(x)$ — предельная функция последовательности (1_0) на E, т.е. $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in E$. Введем понятие "равномерно сходящейся" последовательности функций. Мы подойдем к этому сложному понятию, проведя некоторые предварительные рассуждения.

Возьмем $\varepsilon>0$ — любое, произвольно малое, и закрепим его. Возьмем какое-нибудь значение $x=x_1$ из множества E. Последовательность $\{f_n(x_1)\}_{n\in\mathrm{N}}$ — числовая, сходящаяся к $F(x_1)$. Следовательно, взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер (обозначим его N_{x_1}) такой, что при всех $n>N_{x_1}$ будет выполняться неравенство $|F(x_1)-f_n(x_1)|<\varepsilon$ (номер N_{x_1} берем наименьший из возможных). Возьмем затем другое значение $x=x_2$ из E ($x_2\ne x_1$).

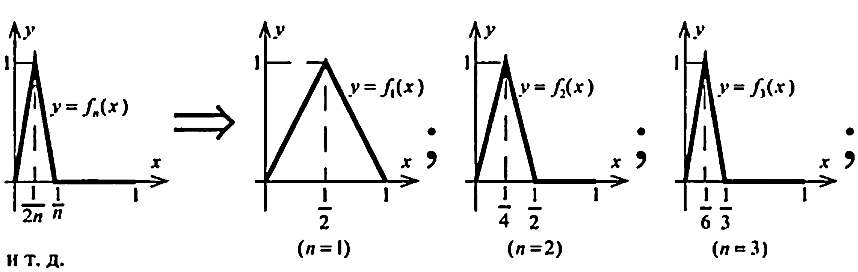


Рис. 6.2. К примеру 2. Графики функций $y=f_n(x)$.

Последовательность $\{f_n(x_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — числовая, сходящаяся к $F(x_2)$. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ (*тому же самому*) отвечает номер N_{x_2} такой, что при всех $n > N_{x_2}$ будет выполняться неравенство $|F(x_2) - f_n(x_2)| < \varepsilon$ (номер N_{x_2} берем наименьший из возможных). Отметим, что, вообще говоря, $N_{x_2} \neq N_{x_1}$, так как при $x = x_2$ наша последовательность может сходиться "медленнее" или "быстрее", чем при $x = x_1$. Представим себе, что мы проделали такое для каждого x из E; мы получим в результате бесконечное множество номеров $\{N_x\}$. Логически мыслимы два случая: 1-й случай — множество номеров $\{N_x\}$ ограничено сверху, т.е. существует такой номер N, что все номера $N_x \le N$; 2-й случай — множество номеров $\{N_x\}$ не ограничено сверху, т.е. среди номеров N_x имеются как угодно большие номера. Оказывается, что именно от этого различия в строении множества номеров $\{N_x\}$, т.е. от различия в характере сходимости последовательности (1_0) и зависят многие свойства этой последовательности (см. дальше теоремы 1—3).

В первом случае последовательность (1_0) называется равномерно сходящейся к $F(x)$ относительно x на E, а во втором — неравномерно сходящейся на E.

Дадим теперь более сжатое определение.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся на множестве E к $F(x)$, называется *равномерно сходящейся* к $F(x)$ относительно x на E, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε (не зависящий от x), такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех x из E. Если же такого номера N не существует, то последовательность называется неравномерно сходящейся на множестве E.

Если последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $F(x)$ на E равномерно относительно x, то пишут:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in E.$$

Замечание. Пусть

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in [a, b]. \tag{3}$$

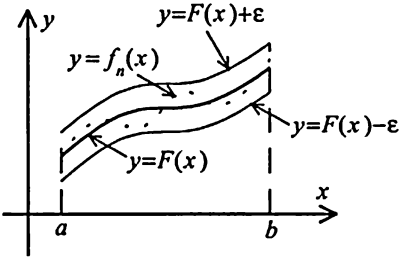


Рис. 6.3. К геометрическому истолкованию соотношения $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in [a, b]$.

Геометрически соотношение (3) означает: график любой функции $y = f_n(x)$, $x \in [a, b]$, при $n > N$ на всем протяжении от $x = a$ до $x = b$ целиком содержится в 2ε-полосе графика функции $y = F(x)$, $x \in [a, b]$.

В нашем примере 2 нельзя указать номера N, начиная с которого графики функций $y = f_n(x)$, $x \in [0, 1]$, на всем протяжении от $x = 0$ до $x = 1$ лежали бы целиком в 2ε-полосе графика функции $y \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. В этом примере предельная функция $F(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Вывод: в примере 2 последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [0, 1]$, сходится к $F(x)$ на промежутке $[0, 1]$ неравномерно.

Теперь мы приступим к рассмотрению вопросов, из которых станет ясной полезность введенного понятия равномерной сходимости последовательности функций.

2°. О непрерывности предельной функции.

Пусть имеется последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in E$. Пусть члены последовательности $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны на E. Пусть $F(x)$ — предельная функция для $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ на E.

Вопрос: Будет ли при этом непрерывной на E функция $F(x)$?
Ответ: Не всегда.

Действительно, рассмотрим снова пример 1. В этом примере члены последовательности: $f_n(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны на промежутке $(-1, 1]$. Предельная же функция $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-1, 1) \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$ терпит разрыв в точке $x = 1$.

Теорема 1 (о непрерывности предельной функции).

Пусть дана последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть $f_n(x) \in C(E)$. Пусть $F(x)$ — предельная функция для последовательности (1) на E, т.е. $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Тогда: если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$, то $F(x) \in C(E)$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Выберем и закрепим на E любую точку x_0. По условию $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E \Rightarrow$ Взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что $|F(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ одновременно для всех x из E, если $n > N$. Возьмем номер m — любой, но такой, что $m > N$, и закрепим его. По условию функция $f_m(x) \in C(E) \Rightarrow$ в частности, $f_m(x)$ непрерывна в точке x_0. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что как только $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Имеем

$$F(x) - F(x_0) = (F(x) - f_m(x)) + \left(f_m(x) - f_m(x_0)\right) + \left(f_m(x_0) - F(x_0)\right) \Rightarrow$$

$$|F(x) - F(x_0)| \le |F(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - F(x_0)|.$$

Но $|F(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in E$, ибо $m > N \Rightarrow$ в частности, $|f_m(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, так как точка $x_0 \in E$. $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, если $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$. Таким образом, получаем $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$, если $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$. Последнее означает, что функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0. У нас точка x_0 — любая, принадлежащая E. Значит, $F(x) \in C(E)$. ◀

Замечание 1. Условие $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$ является достаточным для непрерывности функции $F(x)$ на E, но оно не необходимо.

Действительно, рассмотрим снова пример 2. В этом примере предельная функция $F(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Значит $F(x) \in C([0, 1])$, хотя последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [0, 1]$, рассматриваемая в этом примере, не является равномерно сходящейся на промежутке $[0, 1]$.

Замечание 2. Если члены последовательности (1) непрерывны на E, а предельная функция $F(x)$, $x \in E$, этой последовательности оказывается разрывной на E, то последовательность (1) сходится на E неравномерно.

В самом деле, если бы последовательность (1) была равномерно сходящейся на E, то предельная функция $F(x)$, $x \in E$, была бы непрерывной на E, а это не так.

Вернемся еще раз к примеру 1. В этом примере члены последовательности $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in (-1, 1]$, непрерывны на промежутке $(-1, 1]$, предельная же функция $F(x)$, $x \in (-1, 1]$, оказалась разрывной на промежутке $(-1, 1]$. Следовательно, последовательность $\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in (-1, 1]$, сходится на промежутке $(-1, 1]$ неравномерно.

3°. О предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}},\ x \in [a, b]. \tag{1}$$

Пусть $F(x)$ предельная функция для (1) на $[a, b]$, т.е. $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Пусть $f_n(x) \in R([a, b])$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $F(x) \in R([a, b])$.

Возникает вопрос: справедливо или нет соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \quad \left(= \int_a^b F(x)\,dx\right)? \tag{4}$$

Короче: допустим или нет предельный переход под знаком интеграла?

Оказывается, что соотношение (4) справедливо не всегда. Убедимся в этом на примере.

Пример 3. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ задана на промежутке $[0, 1]$ графически (см. рис. 6.4).

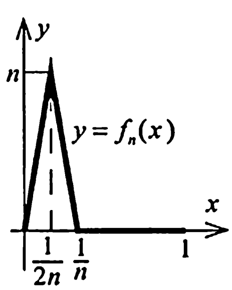


Рис. 6.4.
К примеру 3

Совершенно так же, как и в примере 2, убеждаемся, что предельной функцией для этой последовательности будет $F(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Следовательно, $\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$.

Имеем далее $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$, для любого $n \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Видим, таким образом, что $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{=1/2} \ne \underbrace{\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx}_{=0}$.

Теорема 2. Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}, \quad x\in[a,b]. \qquad (\tilde{1})$$

Пусть $F(x)$ — предельная функция для $(\tilde{1})$ на $[a,b]$ (т.е. $F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in[a,b]$). Пусть $f_n(x)\in R([a,b])$, для любого $n\in\mathrm{N}$ и $F(x)\in R([a,b])$. Тогда: если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x\in[a,b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \quad \left(=\int_a^b F(x)\,dx\right).$$

▶ Для определенности считаем $a<b$. Возьмем $\varepsilon>0$ — любое. По условию $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x\in[a,b]$, $\Rightarrow$ Взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что $|f_n(x)-F(x)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ сразу для всех $x\in[a,b]$, если $n>N$.

Имеем

$$\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b (f_n(x)-F(x))\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b F(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-F(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f_n(x)-F(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon, \text{ если } n>N.$$

Последнее означает, что $\int_a^b F(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.

Замечание 1. Условие: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x\in[a,b]$, является достаточным для допустимости предельного перехода под знаком интеграла, но оно не необходимо.

В самом деле, вернемся к примеру 2. В этом примере $F(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$. Следовательно, $\int_0^1 F(x)\,dx=0$, т.е. $\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx=0$.
Имеем далее,

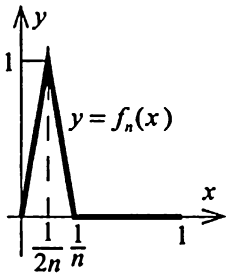


Рис. 6.5. К примеру 2

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n}\cdot 1 = \frac{1}{2n}, \text{ для любого } n \in \mathrm{N} \;\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0.$$

Видим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \;(= 0)$, хотя последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x \in [0, 1]$, не является равномерно сходящейся к своей предельной функции на промежутке $[0, 1]$.

Замечание 2. Пусть $f_n(x) \in R([a, b])$, $F(x) \in R([a, b])$. Если оказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \neq \int\limits_a^b F(x)\,dx$, то последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x \in [a, b]$, сходится на $[a,b]$ неравномерно. В нашем примере 3 последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x \in [0, 1]$ сходится на $[0, 1]$ неравномерно.

4°. О дифференцировании последовательностей.

Пусть имеется последовательность

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}, \quad x \in [a, b]. \qquad (\tilde{1})$$

Пусть $F(x)$ — предельная функция для $(\tilde{1})$ на $[a, b]$. Пусть на промежутке $[a, b]$ существуют $f_n'(x)$ и $F'(x)$.

Вопрос: Справедливо или нет соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = F'(x)$?

Ответ: Не всегда.

Убедимся в этом на примере.

Пример 4. Пусть

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}} = \left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}_{n\in\mathrm{N}}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Здесь $F(x) \equiv 0$, $x \in [0, 2\pi]$ $\Rightarrow$ $F'(x) \equiv 0$, $x \in [0, 2\pi]$; $f_n'(x) = \cos nx$, для любого $n \in \mathrm{N}$, $x \in [0, 2\pi]$. Последовательность $\{f_n'(x)\}_{n\in\mathrm{N}} = \{\cos nx\}_{n\in\mathrm{N}}$ не стремится к нулю на промежутке $[0, 2\pi]$, так как, например, при $x = 0$ ее предел равен единице.

Теорема 3. Пусть имеется последовательность

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad x\in[a, b]. \qquad (\tilde{1})$$

Пусть $F(x)$ — предельная функция для $(\tilde{1})$ на $[a, b]$, т.е. $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \quad x\in[a, b]$. Пусть члены последовательности $(\tilde{1})$ имеют в $[a, b]$ непрерывные производные $f_n'(x)$.

Тогда: если последовательность, составленная из производных, а именно

$$\{f_n'(x)\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (5)$$

сходится равномерно на промежутке $[a, b]$, то $F(x)$ имеет на $[a, b]$ производную $F'(x)$, причем $f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F'(x), \ x\in[a, b]$.

▶ Положим $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=\varphi(x), \quad x\in[a, b]$. Так как $f_n'(x)\in C([a, b])$ и $f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x\in[a, b]$, то $\varphi(x)\in C([a, b])$ (см. теорему 1).

Возьмем любую точку $x_0\in(a, b)$ и закрепим ее. Дадим x_0 приращение Δx, любое, но такое, что $\Delta x\neq 0$ и точка $x_0+\Delta x\in[a, b]$. Рассмотрим разность

$$\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0). \qquad (6)$$

По теореме Лагранжа

$$f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)=f_n'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

Поэтому

$$\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0)=f_n'(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0)=$$

$$=\big(f_n'(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0+\theta\Delta x)\big)+\big(\varphi(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0)\big) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}-\varphi(x_0)\right|\le$$

$$\le\left|f_n'(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0+\theta\Delta x)\right|+\left|\varphi(x_0+\theta\Delta x)-\varphi(x_0)\right|. \qquad (7)$$

Возьмем $\varepsilon>0$ — любое. По условию $f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x\in[a, b]$, $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|f_n'(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ сразу для всех $x \in [a, b]$. Отсюда следует, что

$$\left|f_n'(x_0 + \theta\Delta x) - \varphi(x_0 + \theta\Delta x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } n > N. \qquad (8)$$

Было отмечено, что $\varphi(x) \in C([a, b]) \Rightarrow \varphi(x)$ — непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что как только $x \in [a, b]$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ если $|\Delta x| < \delta$, то, принимая во внимание, что $0 < \theta < 1$, получим

$$|\varphi(x_0 + \theta\Delta x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (9)$$

Из соотношений (7), (8), (9) следует неравенство

$$\left|\frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x} - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon, \text{ если } n > N \text{ и } |\Delta x| < \delta. \qquad (10)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\left|\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - \varphi(x_0)\right| \le \varepsilon, \text{ если } |\Delta x| < \delta. \qquad (11)$$

Таким образом, мы доказали, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $|\Delta x| < \delta$ так сейчас же выполняется неравенство (11). А это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \varphi(x_0)$, т.е. $F'(x_0)$ существует, причем

$$F'(x_0) = \varphi(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0) = F'(x_0).$$

Так как точка x_0 — любая, принадлежащая (a, b), то получаем: $F'(x)$ существует для $x \in (a, b)$, причем $F'(x) = \varphi(x)$, $\quad x \in (a, b)$, а это означает $\lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x) = F'(x)$, $\quad x \in (a, b)$.

Аналогично проводится доказательство для точек $x_0 = a$ и $x_0 = b$. Следовательно, будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = F'(x), \text{ для любого } x \in [a, b].$$

5°. Признаки равномерной сходимости последовательности функций.

Теорема 4. Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}, \quad x \in E. \qquad (1)$$

Пусть $F(x)$ — предельная функция для последовательности (1) на E, т.е. $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Для того чтобы последовательность (1) сходилась к $F(x)$ на E равномерно, необходимо и достаточно, чтобы было:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| = 0. \qquad (12)$$

▶ *Необходимость.* Дано: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$. Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| = 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Так как $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ сразу для всех $x \in E$ $\Rightarrow$ $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ $(< \varepsilon)$, если $n > N$.

Заметим, что последовательность $\left\{\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)|\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ — числовая. Показано, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| = 0$.

Достаточность. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| = 0$. Требуется доказать, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$.

По условию, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| = 0$ $\Rightarrow$ любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon. \qquad (13)$$

Отметим, что здесь номер N зависит только от ε, ибо последовательность $\left\{\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - F(x)|\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ — числовая. Из (13) следует, что если $n > N$, то сразу для всех $x \in E$ будет $|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$. Показано, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in E$. Последнее означает, что $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$. ◀

Теорема 5 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций).

Пусть имеется последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad x \in E. \tag{1}$$

Для того чтобы последовательность (1) имела на E предельную функцию $F(x)$ и чтобы последовательность (1) сходилась к $F(x)$ равномерно на E, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbb{N}$ и сразу для всех $x \in E$ было

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{14}$$

▶ *Необходимость.* Дано: последовательность (1) имеет на E предельную функцию $F(x)$, и $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$. Требуется доказать, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbb{N}$ и сразу для всех $x \in E$ будет $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По условию, $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|f_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ сразу для всех $x \in E$. Пусть m — любое натуральное число, удовлетворяющее условию $m > N$. Тогда сразу для всех x из E будет $|f_m(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Имеем

$$f_m(x) - f_n(x) = (f_m(x) - F(x)) + (F(x) - f_n(x)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - F(x)| + |F(x) - f_n(x)| \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ если $m > N$ и $n > N$, то сразу для всех x из E будет $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Пусть, для определенности, $m > n$ ($n > N$). Положим $m = n + p$, $p \in \mathrm{N}$. Теперь предыдущее неравенство может быть записано в виде $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in E$, если $n > N$, а p — любое натуральное число. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathrm{N}$ и сразу же для всех x из E оказывается $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Требуется доказать, что у последовательности $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x \in E$, имеется на E предельная функция $F(x)$, причем $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$.

Возьмем на множестве E любое $x = x_0$ и закрепим. Последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$ при $x = x_0$ будет числовой. Для нее выполнены условия критерия Коши сходимости числовых последовательностей. Следовательно, последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathrm{N}}$ имеет конечный предел при $n \to \infty$. У нас x_0 — любая точка из множества E. Значит, у последовательности $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x \in E$, на множестве E существует предельная функция $F(x)$. Остается показать, что

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x), \quad x \in E.$$

Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По условию, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathrm{N}$ и сразу для всех x из E

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad f_n(x) - \varepsilon < f_{n+p}(x) < f_n(x) + \varepsilon. \qquad (15)$$

Пусть в (15) n — любое, удовлетворяющее условию $n > N$, закрепленное. Перейдем при этом условии в неравенстве (15) к пределу при $p \to +\infty$. Так как $f_{n+p}(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} F(x)$, $x \in E$, то получим $f_n(x) - \varepsilon \le F(x) \le f_n(x) + \varepsilon$, $x \in E$, т.е. $|f_n(x) - F(x)| \le \varepsilon$ для всех x из E, если $n > N$. У нас N зависит только от ε. Получили:

Любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|f_n(x) - F(x)| \le \varepsilon$ сразу для всех x из E. Последнее означает, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F(x)$, $x \in E$. ◀

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{nx}{1+n+x}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad x \in [0,1].$$

▶ $$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n\left(\frac{1}{n}+1+\frac{x}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{n}+\frac{x}{n}} = x, \quad x \in [0,1];$$

$$|F(x) - f_n(x)| = \left|x - \frac{nx}{1+n+x}\right| = \left|\frac{x+x^2}{1+n+x}\right| = \frac{x+x^2}{1+n+x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{обозначение}}}{=} r_n(x).$$

Имеем: $r_n'(x) = \dfrac{x^2+(n+1)(2x+1)}{(1+n+x)^2} > 0$, $x \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $r_n(x)$ строго возрастает на промежутке $[0,1]$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in[0,1]} r_n(x) =$

$$= r_n(x)\big|_{x=1} = \left.\frac{x^2+x}{1+n+x}\right|_{x=1} = \frac{2}{n+2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0 \Rightarrow$$

данная последовательность сходится равномерно на промежутке $[0,1]$. ◀

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [0,1]$.

▶ $$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{n^2\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)} = 0, \quad x \in [0,1];$$

$$r_n(x) = |F(x) - f_n(x)| = \left|0 - \frac{2nx}{1+n^2x^2}\right| = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_n'(x) = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} \Rightarrow r_n'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{1}{n}.$$

При переходе через точку $x = \frac{1}{n}$ производная меняет знак с “+” на “–” $\Rightarrow$ $r_n(x)$ в точке $x = \frac{1}{n}$ имеет максимум. Следовательно,

$$\sup_{x\in[0,1]} r_n(x) = r_n(x)\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{2nx}{1+n^2x^2}\Big|_{x=\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} r_n(x) = 1 \ (\neq 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ данная последовательность на промежутке $[0, 1]$ сходится неравномерно. ◀

§2. Функциональные ряды (общая теория)

1°. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{1_0}$$

Пусть все члены $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ряда (1_0) определены на множестве $X = \{x\}$. Пусть E ($E \subset X$) есть совокупность всех значений аргумента x, при которых ряд (1_0) сходится. Тогда E называют областью сходимости этого ряда.

Отметим, что областью сходимости ряда (1_0) может оказаться числовое множество самого различного строения. В дальнейшем, как правило, мы будем иметь дело со случаями, когда областью сходимости ряда будет промежуток — замкнутый, открытый или полуоткрытый; конечный или бесконечный.

Нетрудно понять, что в области сходимости ряда (1_0) его n-я частичная сумма, а также сумма и сумма остатка ряда после n-го члена будут функциями от x. Будем обозначать их соответственно $s_n(x)$, $s(x)$, $R_n(x)$, $x \in E$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$. В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-1, 1)$; $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Пример 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = (1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \ldots + (1-x)x^n + \ldots$$

В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-1, 1]$;

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Пример 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right]$. В этом примере $X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-\infty, +\infty)$; $s(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Действительно, при $x = 0$ имеем $s(0) = 0$, так как все члены ряда равны нулю. Пусть теперь x — любое, конечное, не равное нулю. Имеем для такого x:

$$s_n(x) = \left[xe^{-x^2} - 0 \right] + \left[2xe^{-2x^2} - xe^{-x^2} \right] + \left[3xe^{-3x^2} - 2xe^{-2x^2} \right] + \ldots +$$

$$+ \left[(n-1)xe^{-(n-1)x^2} - (n-2)xe^{-(n-2)x^2} \right] + \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right] =$$

$$= nxe^{-nx^2} = \frac{nx}{e^{nx^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Вывод: данный ряд сходится при любом x из $(-\infty, +\infty)$, причем $s(x) \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Введем понятие равномерно сходящегося ряда. Важность этого понятия станет ясна из дальнейшего, когда мы придем к выяснению вопроса о том, когда для функционального ряда, представляющего собой (если говорить формально) “сумму бесконечного числа функций”, сохраняются основные свойства суммы конечного числа функций. Дело в том, что не всегда сумма ряда непрерывных функций оказывается непрерывной функцией, не всегда интеграл от суммы ряда непрерывных функций равен сумме ряда интегралов от каждой из этих функций, не всегда производная от суммы ряда дифференцируемых функций равна сумме ряда производных от каждой из этих функций.

Встретившись с такими фактами, естественно было пытаться определить, каким добавочным условиям должен удовлетворять функциональный ряд (или каким должен быть характер сходимости этого ряда), чтобы для него оставались справедливыми основные свойства суммы конечного числа функций. В поисках этих условий математики 40-х годов прошлого столетия пришли к понятию “равномерно сходящегося ряда”.

Определение. Пусть имеется функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть этот ряд сходится на множестве E и $s(x)$, $x \in E$, — его сумма. Пусть $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in E$, — последовательность частичных сумм ряда (1). Ряд (1) называется равномерно сходящимся на множестве E, если $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$, $x \in E$.

Иначе:

Ряд (1), сходящийся на множестве E, называется равномерно сходящимся на E, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad (\text{т.е. } |R_n(x)| < \varepsilon) \text{ сразу для всех } x \in E.$$

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{x^2 + n}. \tag{2}$$

▶ Замечаем, что при любом закрепленном $x \in (-\infty, +\infty)$ этот ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Значит, он сходится на множестве $E = (-\infty, +\infty)$. Возьмем теперь $\varepsilon > 0$ — любое. Мы знаем, что для суммы остатка ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, справедлива оценка

$$|R_n(x)| \le \left| \frac{(-1)^n}{x^2 + (n+1)} \right| = \frac{1}{x^2 + (n+1)}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Ясно, что $\dfrac{1}{x^2 + (n+1)} < \dfrac{1}{n}$, для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{3}$$

Неравенство (3) выполняется при всех n ($n \in \mathbb{N}$), удовлетворяющих условию $n > N$, где $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Отметим, что $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ зависит только от ε (N не зависит от x). Но тогда и подавно $|R_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, если только $n > N$.

Вывод: данный ряд сходится равномерно на промежутке $(-\infty, +\infty)$. ◀

2°. О непрерывности суммы ряда.

Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть ряд (1) сходится на E и $s(x)$ — его сумма.

Вопрос: Будет ли $s(x)$ непрерывной функцией на E, если члены ряда (1), т.е. функции $u_n(x)$, непрерывны на E?

Ответ: Не всегда.

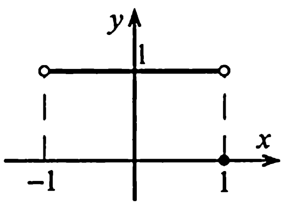


Рис. 6.6. К примеру 2

В самом деле, вернемся к примеру 2. В этом примере ряд сходится на промежутке $(-1, 1]$. Члены ряда $u_n(x) = (1 - x) \cdot x^n$ есть функции непрерывные на промежутке $(-1, 1]$. Однако сумма ряда $s(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ есть функция разрывная. Она терпит разрыв в точке $x = 1$.

Теорема 1. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть $s(x)$, $x \in E$, — сумма ряда (1). Пусть $u_n(x) \in C(E)$. Тогда: если ряд (1) сходится равномерно на E, то $s(x) \in C(E)$.

▶ По условию $u_n(x) \in C(E) \Rightarrow$ частичные суммы ряда (1) $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... , $s_n(x)$, ... есть функции непрерывные на E как суммы конечного числа непрерывных функций. По условию имеем также $s_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$, $x\in E$. Но тогда по теореме 1 предыдущего параграфа о непрерывности предельной функции заключаем, что $s(x)\in C(E)$. ◀

Замечание 1. Равномерная сходимость ряда (1) на E достаточна для непрерывности на E суммы ряда $s(x)$, но она не необходима. Например, у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]$, $x\in(-\infty,+\infty)$, сумма $s(x)\equiv 0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, а значит, $s(x)\in C((-\infty,\infty))$, хотя этот ряд и не является равномерно сходящимся на промежутке $(-\infty,+\infty)$ (это будет показано ниже).

Замечание 2. Если члены ряда (1) есть функции непрерывные на E, а сумма $s(x)$ этого ряда оказывается функцией разрывной на E, то ряд (1) будет неравномерно сходящимся на E.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд (1) сходится равномерно на E. Но тогда, по теореме 1, сумма $s(x)$ этого ряда должна быть непрерывной на E, а это не так.

В нашем примере 2 члены ряда $u_n(x)=(1-x)x^n$ есть функции непрерывные на промежутке $(-1,1]$, а сумма $s(x)$ этого ряда есть функция разрывная на промежутке $(-1,1]$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ сходится неравномерно на промежутке $(-1,1]$.

3°. О почленном интегрировании ряда.

Теорема 2. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad x\in[a,b]. \tag{$\tilde{1}$}$$

Пусть $u_n(x)\in C([a,b])$ $(n=1,2,\dots)$. Тогда: если ряд $(\tilde{1})$ сходится равномерно на промежутке $[a,b]$, то его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

▶ Пусть $s(x)$ — сумма ряда $(\tilde{1})$, $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда $(\tilde{1})$. Отметим, что $s(x)\in C([a,b])$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Значит, $s(x) \in R([a, b])$, т.е. $\int_a^b s(x)\,dx$ существует (т.е. $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx$ существует). По условию, ряд ($\tilde{1}$) сходится равномерно на промежутке $[a, b]$. Значит, $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$, $x \in [a, b]$. По теореме о предельном переходе под знаком интеграла (см. теорему 2 предыдущего параграфа)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx. \tag{4}$$

Заметим, что $\int_a^b s_n(x)\,dx$ существует, ибо $s_n(x) \in C([a, b])$ как сумма конечного числа непрерывных функций. Имеем

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b \left[u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)\right] dx =$$

$$= \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx = \sigma_n.$$

Здесь σ_n — n-я частичная сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx. \tag{5}$$

Соотношение (4) в новых обозначениях имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b s(x)\,dx. \tag{6}$$

Было подчеркнуто выше, что $\int_a^b s(x)\,dx$ существует. Значит, существует конечный предел $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, а это означает, что ряд (5) сходится и его сумма равна σ. Таким образом, получили: $\int_a^b s(x)\,dx = \sigma$, т.е. $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$. ◀

Замечание 1. Условие равномерной сходимости ряда ($\tilde{1}$) является достаточным для допустимости почленного интегрирования функционального ряда, но оно не необходимо.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $x \in [0,1]$. Этот ряд сходится на промежутке $[0,1]$, и его сумма $s(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

Видим, что члены данного ряда есть функции непрерывные на промежутке $[0,1]$, а сумма $s(x)$ есть функция разрывная на этом промежутке. Значит, наш ряд сходится неравномерно на промежутке $[0,1]$. Имеем $\int\limits_0^1 s(x)\,dx = \int\limits_0^1 1\cdot dx = 1$. Имеем, далее,

$$\int\limits_0^1 u_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 (1-x)\,x^n\,dx = \int\limits_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

А тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right). \tag{7}$$

Пусть σ_n — n-я частичная сумма ряда (7). Имеем

$$\sigma_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \;\Rightarrow\; \sigma = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Видим, таким образом, что

$$\underbrace{\int\limits_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)dx}_{=1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 u_n(x)\,dx}_{=1},$$

хотя исходный ряд был неравномерно сходящимся.

Замечание 2. Если оказывается, что

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx,$$

то исходный ряд $(\tilde{1})$ не является равномерно сходящимся на промежутке $[a, b]$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд $(\tilde{1})$ сходится равномерно на промежутке $[a, b]$. Но тогда должно быть по теореме 2

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx,$$

а это не так.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right], \quad x \in [0, 1]. \tag{8}$$

Раньше было показано, что сумма $s(x)$ этого ряда равна нулю на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, в частности, $s(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Значит, $\int_0^1 s(x)\, dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$. Имеем, далее,

$$\int_0^1 u_n(x)\, dx = \int_0^1 \left[nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-(n-1)x^2}\, d\left[-(n-1)x^2 \right] - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx^2}\, d[-nx^2] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{-(n-1)x^2} - e^{-nx^2} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n} \right).$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n} \right). \tag{9}$$

Обозначим через σ_n n-ю частичную сумму ряда (9). Имеем

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{e}\right)+\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{e^{n-1}}-\frac{1}{e^n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Видим, что

$$\underbrace{\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx}_{=0} \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx}_{=\frac{1}{2}}.$$

Вывод: ряд (8) сходится на промежутке $[0,1]$ неравномерно. (Значит, он сходится неравномерно на промежутке $(-\infty,+\infty)$.)

4°. О почленном дифференцировании функционального ряда.

Теорема 3. Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), \quad x\in[a,b]. \qquad (\tilde{1})$$

Пусть этот ряд сходится на промежутке $[a,b]$. Пусть члены ряда $(\tilde{1})$ имеют в $[a,b]$ непрерывные производные $u_n'(x)$. Тогда: если ряд, составленный из производных,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x) \qquad (10)$$

сходится равномерно на промежутке $[a,b]$, то исходный ряд $(\tilde{1})$ можно в промежутке $[a,b]$ дифференцировать почленно, т.е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x), \quad x\in[a,b].$$

▶ Обозначим суммы рядов $(\tilde{1})$ и (10) через $s(x)$ и $\sigma(x)$ соответственно. Отметим, что $\sigma(x)\in C([a,b])$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Следовательно, $\sigma(x)\in R([a,b]) \Rightarrow \sigma(t)\in R([a,x])$, где x — любое, удовлетворяющее условию: $a<x\le b$. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)$, $t\in[a,x]$, выполнены условия теоремы о почленном интегрировании функционального ряда. Поэтому

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big|_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(x) - u_n(a)\right]. \quad (11)$$

Так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ сходятся и имеют суммы $s(x)$ и $s(a)$ соответственно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x) - u_n(a)\right]$ сходится и его сумма равна $\left(s(x) - s(a)\right)$. Равенство (11) может быть записано, следовательно, в виде

$$\int_a^x \sigma(t)\, dt = s(x) - s(a) \quad \Rightarrow \quad s(x) = s(a) + \int_a^x \sigma(t)\, dt. \qquad (12)$$

Равенство (12) установлено нами для $x \in (a, b]$. Нетрудно видеть, что оно верно и при $x = a$. В правой части равенства (12) мы имеем интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. По теореме Барроу

$$\left(s(a) + \int_a^x \sigma(t)\, dt\right)_x' = \sigma(x) \text{ для любого } x \in [a, b].$$

Но тогда для любого $x \in [a, b]$ существует производная по x и от левой части равенства (12), т.е. $s'(x)$, причем $s'(x) = \sigma(x)$.

Последнее равенство равносильно равенству

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)_x' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a, b].$$

5°. Признаки равномерной сходимости функционального ряда.

1) Критерий Коши.

Пусть имеется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in E$ (1). Пусть $s(x)$ и $s_n(x)$ — сумма и n-я частичная сумма ряда (1) соответственно. Мы знаем, что ряд (1) называется равномерно сходящимся на множестве E, если $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$, $x \in E$. Но по критерию Коши равномерной сходимости последовательности функций мы имеем: для того, чтобы последовательность $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in E$, имела на E предельную функцию $s(x)$ и чтобы эта последовательность сходилась к $s(x)$ равномерно на E, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbb{N}$ и сразу для всех $x \in E$ было

$$\left|s_{n+p}(x) - s_n(x)\right| < \varepsilon .$$

Так как $s_{n+p}(x) - s_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)$, то критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда может быть сформулирован и так:

Теорема 4. Для того чтобы ряд (1) сходился равномерно на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbb{N}$ и сразу для всех $x \in E$ было

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon . \tag{13}$$

Теорема 5. Если ряд (1) сходится равномерно на множестве E, то

$$u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0, \quad x \in E . \tag{14}$$

▶ Действительно, так как ряд (1) сходится равномерно на E, то неравенство (13) при $n > N$ и сразу для всех $x \in E$ выполняется при любом $p \in \mathbb{N}$, в частности, и при $p = 1$. Получаем, следовательно: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|u_{n+1}(x)\right| < \varepsilon$ сразу для всех x из E. Последнее означает, что $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in E$. ◀

Соотношение $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in E$, является необходимым условием равномерной сходимости ряда (1) на E.

Теорема 6. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1) сходится равномерно на множестве E. Пусть $v(x)$ есть функция, ограниченная на E. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(x) \cdot u_n(x) \tag{15}$$

сходится равномерно на множестве E.

▶ По условию, функция $v(x)$ — ограниченная на множестве E. Значит, существует число $M > 0$, такое, что

$$|v(x)| \le M, \quad x \in E. \tag{16}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое.

По условию, ряд (1) сходится равномерно на E. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathbb{N}$ и сразу для всех $x \in E$ будет

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{17}$$

Имеем

$$\left|v(x) \cdot u_{n+1}(x) + v(x) \cdot u_{n+2}(x) + \ldots + v(x) \cdot u_{n+p}(x)\right| =$$

$$= |v(x)| \cdot \left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right|$$

$\Rightarrow$ принимая во внимание (16) и (17), будем иметь при $n > N$, при любом $p \in \mathbb{N}$ и сразу для всех x из E:

$$\left|v(x) \cdot u_{n+1}(x) + v(x) \cdot u_{n+2}(x) + \ldots + v(x) \cdot u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши заключаем, что ряд (15) сходится равномерно на множестве E. ◀

Теорема 7 (признак Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда).

Пусть имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{18}$$

— числовой, положительный, сходящийся ряд. Тогда, если при любом $n \in \mathbb{N}$ и сразу для всех $x \in E$ оказывается

$$|u_n(x)| \le c_n, \tag{19}$$

то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на E.

▶ По условию, $|u_n(x)| \le c_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и при всех x из E. Так как ряд (18) сходится, то, по первому признаку сравнения числовых положительных рядов, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится при каждом x из E. Значит, ряд (1) сходится абсолютно на множестве E.

Покажем теперь, что ряд (1) сходится равномерно на множестве E. Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Так как ряд (18) сходится, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что как только $n > N$, так сейчас же при любом $p \in \mathrm{N}$ будет $|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + + c_{n+p}| < \varepsilon$, или, так как $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{n+p}$ — положительные,

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon. \tag{20}$$

Заметим, что число N найдено с помощью числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и потому оно не зависит от x, а зависит только от ε. Имеем

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| \le$$
$$\le c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p},$$

для любых n и $p \in \mathrm{N}$ и для всех $x \in E$. А тогда, в силу (20), при $n > N$, при любом $p \in \mathrm{N}$ и сразу для всех $x \in E$ $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ по критерию Коши заключаем, что ряд (1) сходится равномерно на множестве E.

Замечание. 1) Не следует думать, что равномерная сходимость ряда всегда сопровождается его абсолютной сходимостью.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^x}$ сходится в промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ равномерно, но неабсолютно.

То, что данный ряд сходится в промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, следует из теоремы Лейбница о знакочередующемся ряде. Но этот ряд сходится неабсолютно; действительно, ряд из абсолютных величин членов данного ряда имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, и при всех $x \le 1$ он, как мы знаем, расходится.

Докажем теперь, что данный ряд сходится в промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ равномерно.

Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Мы знаем, что для суммы остатка ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, справедлива оценка

$$\left|R_n(x)\right| \le \left|u_{n+1}(x)\right| = \left|(-1)^n \frac{1}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{(n+1)^x} \le \frac{1}{(n+1)^{1/2}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

для всех $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Рассмотрим неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Это неравенство выполняется при всех n ($n \in \mathbf{N}$), удовлетворяющих условию $n > N$, где $N = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ (отметим, что N зависит только от ε; от x N не зависит). Но тогда и подавно $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, если только $n > N$.

Вывод: данный ряд сходится равномерно на промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2) Возможны также случаи, когда функциональный ряд сходится абсолютно, но неравномерно. Например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ в промежутке $[0;1]$ сходится абсолютно, но неравномерно. Было показано ранее (см. пример 2), что этот ряд на промежутке $[0;1]$ сходится и его сумма $s(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Так как члены ряда неотрицательны на $[0;1]$, то он и абсолютно сходящийся. Так как сумма ряда непрерывных функций оказалась разрывной функцией на $[0;1]$, то ряд сходится неравномерно на $[0;1]$.

Таким образом, приходим к выводу, что связи между равномерной и абсолютной сходимостью ряда в общем случае нет.

Теорема 8 (признак Дирихле).

Пусть имеется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x), \qquad x \in E, \tag{21}$$

в котором функции $u_n(x)$ и $v_n(x)$ — такие, что:

1) последовательность $\{v_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in E$, при каждом закрепленном x из E монотонно убывает, и $v_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in E$ ($\Rightarrow$ $v_n(x) > 0$, $x \in E$ и $n \in \mathbf{N}$);

2) последовательность $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x\in E$ — ограниченная на множестве E (здесь $s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$).

Тогда ряд (21) сходится равномерно на множестве E.

▶ По условию, последовательность $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x\in E$ — ограниченная на множестве E. Значит, существует число $M>0$, такое, что $|s_n(x)|\le M$ при любом $n\in\mathbf{N}$ и для всех $x\in E$.

Возьмем $\varepsilon>0$ — любое. По условию, $v_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0$, $x\in E$. Следовательно, взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε такой, что как только $n>N$, так сейчас же $|v_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{6M}$ сразу для всех x из E (или $v_n(x)<\dfrac{\varepsilon}{6M}$, ибо $v_n(x)>0$). Мы докажем, что ряд (21) сходится равномерно на E, если покажем, что взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n>N$, так сейчас же при любом $p\in\mathbf{N}$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\cdot v_k(x)\right|<\varepsilon$ сразу для всех x из E (см. критерий Коши равномерной сходимости ряда). Имеем

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|=$$
$$=|s_{n+p}(x)-s_n(x)|\le|s_{n+p}(x)|+|s_n(x)|\le 2M$$

при любом $p\in\mathbf{N}$ и для всех x из E.

По лемме (глава 5, §10, п. 1°), имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\cdot v_k(x)\right|=\left|\sum_{i=1}^{p}u_{n+i}(x)\cdot v_{n+i}(x)\right|\le 2M\Big(|v_{n+1}(x)|+2|v_{n+p}(x)|\Big)=$$
$$=2M\big(v_{n+1}(x)+2v_{n+p}(x)\big)$$

при любом $p\in\mathbf{N}$ и для всех $x\in E$, откуда, если $n>N$, получаем $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\cdot v_k(x)\right|<2M\cdot\dfrac{3\varepsilon}{6M}=\varepsilon$ при любом $p\in\mathbf{N}$ и для всех x из E.

Следовательно, ряд (21) сходится равномерно на множестве E (здесь $\varepsilon > 0$ — любое, N зависит только от ε, неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$ выполняется при $n > N$ сразу для всех $x \in E$ и любом $p \in \mathrm{N}$). ◀

Теорема 9 (признак Абеля).

Пусть имеется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$, $x \in E$ (21). Рассмотрим последовательность

$$\{v_n(x)\}_{n \in \mathrm{N}}, \ x \in E \tag{22}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \ x \in E. \tag{23}$$

Тогда: если 1) последовательность (22) — ограниченная на E и монотонная при каждом закрепленном x из E и если 2) ряд (23) сходится равномерно на множестве E, то ряд (21) сходится равномерно на множестве E.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Мы докажем, что ряд (21) сходится равномерно на множестве E, если покажем, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$ при любом $p \in \mathrm{N}$ и сразу для всех x из E.

По условию, последовательность (22) — ограниченная на E. Значит, существует число $M > 0$, такое, что $|v_n(x)| \le M$ при любом $n \in \mathrm{N}$ и для всех x из E.

По условию, ряд (23) сходится равномерно на E. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, зависящий только от ε, такой, что как только $n > N$, так сейчас же $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$ сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathrm{N}$.

По лемме (глава 5, §10, п. 1°) имеем при $n > N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| = \left|\sum_{l=1}^{p} u_{n+l}(x) \cdot v_{n+l}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3M}\left(|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|\right)$$

сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathrm{N}$ ($\dfrac{\varepsilon}{3M}$ выступает в роли числа $L > 0$ в лемме).

Так как $|v_{n+1}(x)| \le M$, $|v_{n+p}(x)| \le M$ при любых n, p и для всех $x \in E$, то получаем $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$, если $n > N$, сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathbf{N}$.

Здесь $\varepsilon > 0$ — любое, N зависит только от ε, неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \cdot v_k(x)\right| < \varepsilon$ выполняется при $n > N$ сразу для всех $x \in E$ и при любом $p \in \mathbf{N}$. Значит, ряд (21) сходится равномерно на множестве E.

§3. Степенные ряды

1°. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tilde{x} - a)^n = c_0 + c_1(\tilde{x} - a) + c_2(\tilde{x} - a)^2 + \ldots + c_n(\tilde{x} - a)^n + \ldots \qquad (1_0)$$

Здесь a и коэффициенты c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ... есть постоянные, т.е. не зависящие от $\tilde{x}$, числа.

Так как ряд (1_0) заменой $\tilde{x} - a = x$ сводится к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots, \qquad (1)$$

то исследование степенных рядов сводится к изучению рядов вида (1).

Ясно, что всякий степенной ряд вида (1) сходится в точке $x = 0$.

Следует отметить, что степенной ряд (1) является частным случаем общего функционального ряда, когда

$$u_n(x) = c_n \cdot x^n.$$

В выяснении вопроса о строении области сходимости степенного ряда важную роль играет следующая теорема.

Теорема 1 (первая теорема Абеля).

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ сходится в точке x_0 ($x_0 \ne 0$), то он сходится, и притом абсолютно, в каждой точке x, удовлетворяющей неравенству: $|x| < |x_0|$.

▶ По условию, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_0^n$ сходится. Но тогда $c_n \cdot x_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (см. необходимое условие сходимости ряда). А значит, переменная $c_n \cdot x_0^n$ ограничена (как переменная, имеющая конечный предел). Следовательно, существует число $M > 0$, такое, что $\left|c_n \cdot x_0^n\right| \le M$, для любого $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n \cdot x^n\right|. \tag{2}$$

Так как $x_0 \ne 0$, то ряд (2) может быть записан в виде $\sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

Имеем $\left|c_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, для любого $n \in \mathbf{N}$.

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ сходится при каждом x, удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$ (как геометрический ряд), то при каждом таком x сходится ряд (2). А значит, ряд (1) сходится абсолютно при каждом x, удовлетворяющем неравенству $|x| < |x_0|$. Теорема доказана. ◀

Следствие. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в некоторой точке $\tilde{x}_0$, то он расходится и в каждой точке x, удовлетворяющей неравенству: $|x| > |\tilde{x}_0|$.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в какой-нибудь точке x, для которой $|x| > |\tilde{x}_0|$. Но тогда по теореме 1 он должен сходиться в точке $\tilde{x}_0$, а это не так.

Замечание. Геометрически теорема 1 и следствие из нее означают следующее:

1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_0 $(x_0 \ne 0)$, то он сходится, и притом абсолютно, во всех точках оси Ox, расположенных ближе к началу координат, чем точка x_0.

2. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке $\tilde{x}_0$, то он расходится и во всех точках оси Ox, расположенных дальше от начала координат, чем точка $\tilde{x}_0$.

Пусть $E = \{x\}$ — совокупность всех тех x, для которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится. Заметим, что $E \neq \varnothing$, так как, например, точка $x = 0 \in E$. Положим $R = \sup_{x \in E}\{|x|\}$. Ясно, что если $x \in E$, то $|x| \leq R$. Могут реализоваться следующие случаи:

$$1)\ R = 0;\quad 2)\ R = +\infty;\quad 3)\ 0 < R < +\infty.$$

Лемма 1. Если $R = 0$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится для любого $x \neq 0$.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в некоторой точке x_1 ($x_1 \neq 0$). Но тогда $x_1 \in E$ и, следовательно, должно быть $|x_1| \leq R$, т. е. $|x_1| \leq 0$, а это невозможно, если $x_1 \neq 0$. ◀

Лемма 2. Если $R = +\infty$, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится и притом абсолютно для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Возьмем любое x из $(-\infty, +\infty)$ и закрепим. Обозначим его через $\tilde{x}$. По условию $\sup_{x \in E}\{|x|\} = +\infty$. Это означает, что множество $\{|x|\}_{x \in E}$ — неограниченное сверху. Но тогда на этом множестве обязательно найдется элемент $|x_0|$ ($x_0 \in E$) такой, что будет $|\tilde{x}| < |x_0|$. Так как $x_0 \in E$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_0. Но тогда, по теореме Абеля, он сходится и притом абсолютно в точке $\tilde{x}$. У нас точка $\tilde{x}$ — любая из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, лемма 2 доказана. ◀

Лемма 3. Если $0 < R < +\infty$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится и притом абсолютно в каждой точке x, для которой $|x| < R$, и расходится в каждой точке x, для которой $|x| > R$. (О поведении ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ в точках $x=-R$ и $x=R$, не зная коэффициентов ряда, ничего определенного сказать нельзя.)

▶ 1) Возьмем любую точку $\tilde{x}$, для которой $|\tilde{x}| < R$. У нас $R = \sup_{x \in E}\{|x|\}$. Поэтому на множестве $\{|x|\}_{x \in E}$ обязательно найдется элемент $|x_0|$ ($x_0 \in E$), такой, что будет $|\tilde{x}| < |x_0|$. Так как $x_0 \in E$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_0. Но тогда, по теореме Абеля, он сходится и притом абсолютно в точке $\tilde{x}$. Так как точка $\tilde{x}$ — любая, удовлетворяющая условию $|\tilde{x}| < R$, то первое утверждение леммы 3 доказано.

2) Возьмем любую точку x_*, для которой $|x_*| > R$. Нужно доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_*. Рассуждаем от противного. Допустим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_*. Но тогда $x_* \in E$, и, следовательно, должно быть $|x_*| \le R$, а это не так. ◀

Определение. Число $R = \sup_{x \in E}\{|x|\}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, а промежуток $(-R, R)$ — *интервалом сходимости* этого ряда. Заметим, что для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ интервалом сходимости будет промежуток $(a-R, a+R)$. Как мы увидим дальше, поведение степенного ряда на концах интервала сходимости может быть различным.

Замечание. Во многих случаях радиус сходимости R степенного ряда (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ может быть найден с помощью признаков Даламбера и Коши, после чего для получения всей области сходимости остается только выяснить поведение ряда при $x = \pm R$. Обсудим эти случаи.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

▶ Доказательство утверждения 1 получается простым применением признака Даламбера к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n x^n\right|$, составленному из модулей членов ряда (1).

В самом деле, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_n x^n\right|}{\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|}=\frac{1}{|x|}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

(можно считать здесь $x\neq 0$, так как в точке $x=0$ всякий степенной ряд вида (1) сходится).

По условию, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ существует (конечный или бесконечный). Обозначим этот предел через C.

1. Пусть $C\neq 0$ и $C\neq\infty$. Будем иметь тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\dfrac{C}{|x|}$.

Следовательно, если $\dfrac{C}{|x|}>1$, т.е. если $|x|<C$, то ряд (1) сходится и притом абсолютно; если $\dfrac{C}{|x|}<1$, т.е. если $|x|>C$, то ряд (1) расходится. Значит, радиус сходимости R ряда (1) оказывается равным C, т.е. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

2. Пусть $C=0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\dfrac{1}{|x|}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=0$ (<1) при любом $x\neq 0$. Значит, ряд (1) сходится только в точке $x=0$. Следовательно, в этом случае $R=0$ ($R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=0$).

3. Пусть $C=+\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\dfrac{1}{|x|}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=+\infty$ (>1) при любом конечном x $(x\neq 0)$. Значит, ряд (1) сходится для $x\in(-\infty,+\infty)$. Следовательно, в этом случае $R=+\infty$

$\left(R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=+\infty\right)$. ◀

Утверждение 2. Пусть существует конечный или бесконечный предел $C=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$. Тогда:

1) если $C\neq 0$ и $C\neq\infty$, то $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$;

2) если $C=0$, то $R=+\infty$;

3) если $C=\infty$, то $R=0$.

▶ Доказательство утверждения 2 получается простым применением признака Коши к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_nx^n|$, составленному из модулей членов ряда (1).

Действительно, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_nx^n|}=|x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$. По условию, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ существует (конечный или бесконечный).

1. Пусть $C\neq 0$ и $C\neq\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_nx^n|}=|x|\cdot C$; следовательно, если $|x|\cdot C<1$, т.е. если $|x|<\dfrac{1}{C}$, то ряд (1) сходится и притом абсолютно; если $|x|\cdot C>1$, т.е. если $|x|>\dfrac{1}{C}$, то ряд (1) расходится. Значит, радиус сходимости R ряда (1) оказывается равным $\dfrac{1}{C}$, т.е. $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

2) Пусть $C=0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_nx^n|}=|x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$ при любом конечном x $(x\neq 0)$. Значит, ряд (1) сходится для $x\in(-\infty,+\infty)$. Следовательно, в этом случае $R=+\infty$.

3) Пусть $C = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty \quad (>1)$ при любом $x \neq 0$. Значит, ряд (1) сходится только в точке $x = 0$. Следовательно, в этом случае $R = 0$.

Замечание. Тот же прием позволяет доказать утверждения, аналогичные утверждениям 1 и 2, для случая степенных рядов, содержащих только четные или нечетные степени x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \tag{5}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n-1}. \tag{6}$$

Утверждение $\tilde{1}$. Если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|$, то для ряда (5) $R^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, а для ряда (6) $R^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|$.

Утверждение $\tilde{2}$. Пусть существует конечный или бесконечный предел $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ или $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$. Тогда:

1) если $C \neq 0$ и $C \neq \infty$, то для ряда (5) $R^2 = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, а для ряда (6) $R^2 = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$;

2) если $C = 0$, то $R = +\infty$ для рядов (5) и (6);

3) если $C = \infty$, то $R = 0$ для рядов (5) и (6).

Замечание. С помощью признаков Даламбера и Коши можно найти радиус сходимости *не для всякого* степенного ряда, а лишь для такого, у которого существуют указанные выше пределы.

Затруднения при применении рассмотренного выше метода определения радиуса сходимости степенного ряда могут возникнуть, например, в случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю. В этом случае можно попробовать применить рассмотренный метод, предварительно перенумеровав подряд все члены ряда с отличными от нуля коэффициентами (отчего его сходимость и сумма, в случае, если он сходится, не изменяются).

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{где} \quad c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad n = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0, & \text{если} \quad n = 0, 2, 4, \ldots. \end{cases}$$

Здесь признак Даламбера неприменим для определения радиуса сходимости этого ряда, так как отношение $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ не имеет смысла для нечетных номеров n. Неприменим здесь и признак Коши, так как не существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Однако, если записать данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1},$$

где $b_k = \dfrac{1}{2k+1}$, и убедившись, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{b_k}{b_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2k+3}{2k+1} = 1$, мы, в соответствии с утверждением $\tilde{1}$, заключаем, что радиус сходимости R исходного ряда равен 1.

Замечание. Формула для определения радиуса сходимости произвольного степенного ряда через его коэффициенты в общем случае (так называемая формула Коши — Адамара) выведена, например, в книге Л.Д. Кудрявцева “Курс математического анализа”, том I.

2°. Равномерная сходимость степенного ряда.

Теорема 2 (вторая теорема Абеля).

Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Пусть r — любое число, удовлетворяющее условию $0 < r < R$. Тогда ряд (1) сходится равномерно в замкнутом промежутке $[-r, r]$.

▶ Так как $0 < r < R$, то точка $x = r \in (-R, R)$. Значит, ряд (1) сходится, и притом абсолютно, при $x = r$, т.е. сходится ряд

$|c_0|+|c_1|\cdot r+|c_2|\cdot r^2+\ldots+|c_n|\cdot r^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot r^n$. Имеем $|c_n x^n|\le|c_n|\cdot r^n$ для любого $n\in\mathrm{N}$ и для всех $x\in[-r,r]$. А тогда по признаку Вейерштрасса заключаем, что ряд (1) сходится равномерно в $[-r,r]$. ◀

Дополнение. Из доказанной теоремы следует, что степенной ряд (1) сходится равномерно во всяком замкнутом промежутке, целиком лежащем внутри интервала сходимости этого степенного ряда. Однако гарантировать равномерную сходимость ряда (1) в интервале сходимости $(-R,R)$ нельзя. Здесь все зависит от поведения ряда в точках $x=\pm R$. Именно:

1) Если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точках $x=\pm R$, то он сходится равномерно в $[-R,R]$ (а следовательно, и в интервале сходимости $(-R,R)$);

2) Если ряд (1) расходится в точке $x=R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x=-R$, то он сходится равномерно в промежутке $[-R,r]$, где r — любое, удовлетворяющее условию $0<r<R$;

3) Если ряд (1) расходится в точке $x=-R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x=R$, то он сходится равномерно в промежутке $[-r,R]$, где r — любое, удовлетворяющее условию $0<r<R$.

▶ В самом деле, пусть, для определенности, ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x=R$. Покажем, что этот ряд сходится тогда равномерно в $[0,R]$. Для этого запишем ряд (1) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot R^n\cdot\left(\frac{x}{R}\right)^n,\qquad x\in[0,R]. \tag{7}$$

В (7): последовательность $v_n(x)=\left(\dfrac{x}{R}\right)^n$, $x\in[0,R]$ — ограниченная и монотонная при каждом закрепленном x из $[0,R]$; ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n R^n$ сходится по условию. (Так как этот ряд — числовой, то его можно считать равномерно сходящимся на промежутке $[0,R]$.) А тогда по признаку Абеля равномерной сходимости функциональных рядов заключаем, что ряд (7), а значит, ряд (1) сходится равномерно на промежутке $[0,R]$.

Если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = -R$, то, сделав замену $x = -\tilde{x}$, мы получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \tilde{x}^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n R^n \cdot \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^n, \qquad (\tilde{7})$$

который, по условию, сходится хотя бы неабсолютно в точке $\tilde{x} = R$. По признаку Абеля, ряд $(\tilde{7})$ будет равномерно сходящимся для $\tilde{x} \in [0, R]$. Следовательно, ряд (1) будет равномерно сходящимся для $x \in [-R, 0]$. ◀

3°. Непрерывность суммы степенного ряда.

Теорема 3. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (1). Пусть $s(x)$ — сумма ряда (1). Тогда $s(x) \in C((-R, R))$.

▶ Возьмем любую точку x_0 в промежутке $(-R, R)$ и закрепим. Ясно, что $-R < x_0 < R$. По свойству плотности множества вещественных чисел, обязательно найдется число $r > 0$, такое, что

$$x_0 \in [-r, r] \quad \text{и} \quad [-r, r] \subset (-R, R).$$

Так как члены ряда (1) — функции, непрерывные в $[-r, r]$, и так как ряд (1) сходится равномерно в промежутке $[-r, r]$, то $s(x) \in C([-r, r])$. Значит, в частности, $s(x)$ непрерывна в точке x_0. Так как точка x_0 — любая, принадлежащая $(-R, R)$, то заключаем, что $s(x) \in C((-R, R))$. ◀

Дополнение. Пусть $0 < R < +\infty$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (1). Пусть $s(x)$ — сумма ряда (1). Тогда:

1) если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точках $x = \pm R$, то $s(x) \in C([-R, R])$ (непрерывность в точках $x = \pm R$ односторонняя);

2) если ряд (1) расходится в точке $x = R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = -R$, то $s(x) \in C([-R, R))$ [непрерывность в точке $x = -R$ правосторонняя, т. е. $\lim\limits_{x \to -R+0} s(x) = \lim\limits_{x \to -R+0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n R^n$].

3) если ряд (1) расходится в точке $x=-R$, но сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = R$, то $s(x) \in C((-R, R])$ (непрерывность в точке $x = R$ левосторонняя, т. е. $\lim\limits_{x\to R-0} s(x) = \lim\limits_{x\to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n$).

▶ Непрерывность $s(x)$ в точках интервала сходимости $(-R, R)$ установлена теоремой 3 для всех трех случаев 1), 2) и 3), так что ниже следует говорить лишь о непрерывности $s(x)$ в точках $x=-R$, $x=R$.

В случае 1) ряд (1) по условию сходится хотя бы неабсолютно в точках $x=-R$, $x=R$. Но тогда ряд (1) сходится равномерно в $[-R, R]$. Так как члены ряда (1) непрерывны в промежутке $[-R, R]$, то $s(x) \in C([-R, R])$. Разумеется, конечно, непрерывность $s(x)$ в точке $x=-R$ — справа, а в точке $x = R$ — слева.

В случае 2) ряд (1) будет равномерно сходящимся в промежутке $[-R, r]$, где $0<r<R$. Так как члены ряда (1) непрерывны в промежутке $[-R, r]$, то $s(x) \in C([-R, r])$. В частности, $s(x)$ непрерывна справа в точке $x=-R$.

В случае 3) ряд (1) будет сходиться равномерно в промежутке $[-r, R]$, где $0<r<R$. Так как члены ряда (1) непрерывны в промежутке $[-r, R]$, то $s(x) \in C([-r, R])$. В частности, $s(x)$ непрерывна слева в точке $x = R$. ◀

4°. Почленное интегрирование степенного ряда.

Теорема 4. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (1). Пусть замкнутый промежуток $[a, b]$ — любой, но такой, что $[a, b] \subset (-R, R)$. Тогда

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n x^n \, dx. \tag{8}$$

▶ Ряд (1) сходится равномерно в $[a, b]$, так как $[a, b] \subset (-R, R)$. Члены ряда (1) — функции, непрерывные в $[a, b]$. А тогда по теореме о почленном интегрировании функционального ряда (общего вида) заключаем, что $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b c_n x^n \, dx$. ◀

Дополнение. Пусть $0 < R < +\infty$ — радиус сходимости степенного ряда (1). Тогда:

1) если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = -R$, то в качестве a — нижнего предела интеграла в формуле (8) может выступать число $-R$;

2) если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно в точке $x = R$, то в качестве b — верхнего предела интеграла в формуле (8) может выступать число R.

5°. Почленное дифференцирование степенных рядов.

Лемма 1. Пусть $0 < q < 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ сходится.

▶ Имеем $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{nq^n}{(n+1)q^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{q}$ (> 1). Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ сходится. ◀

Лемма 2. Пусть имеются степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = c_1 x + 2c_2 x^2 + \ldots + nc_n x^n + \ldots \tag{9}$$

Пусть R_1 и R_2 — радиусы сходимости рядов (1) и (9) соответственно. Тогда $R_1 = R_2$.

▶ 1. Установим сначала, что $R_2 \le R_1$.

Для этого возьмем x_1 — любое, но такое, что $0 < x_1 < R_2$. Ясно, что $x_1 \in (-R_2, R_2)$. Значит, ряд (9) сходится, и притом абсолютно, в точке x_1, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|c_n x_1^n\right|. \tag{10}$$

Так как для любого $n \in \mathrm{N}$ $\left|c_n x_1^n\right| \le n\left|c_n x_1^n\right|$, то заключаем по первому признаку сравнения для положительных рядов, что в точке x_1 сходится ряд, составленный из модулей членов ряда (1). Значит, ряд (1) в точке x_1 сходится, и притом абсолютно. Мы знаем, что ряд (1) в точках, лежащих вне замкнутого промежутка $[-R_1, R_1]$, расходится. Значит, точка x_1 не может лежать вне $[-R_1, R_1]$. Значит, $x_1 \in [-R_1, R_1]$. Но тогда

$$0 < x_1 \le R_1. \tag{11}$$

У нас x_1 — любое, удовлетворяющее условию $0 < x_1 < R_2$. Станем изменять x_1, приближая его неограниченно к R_2. Из неравенства (11) получим при этом в пределе

$$R_2 \le R_1.$$

2. Установим теперь, что $R_1 \le R_2$.

Для этого возьмем x_1 — любое, но такое, что $0 < x_1 < R_1$. Затем возьмем x_2 — любое, но такое, что $x_1 < x_2 < R_1$. Ясно, что $x_2 \in (-R_1, R_1)$. Значит, ряд (1) сходится, и притом абсолютно, в точке x_2, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n x_2^n\right|$. Но тогда $\left|c_n x_2^n\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (см. необходимое условие сходимости ряда). Так как переменная, имеющая конечный предел, — ограниченная, то заключаем: существует число $M > 0$, такое, что $\left|c_n x_2^n\right| \le M$, для любого $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим в точке x_1 ряд, составленный из модулей членов ряда (9), а именно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|c_n x_1^n\right|. \tag{12}$$

Имеем

$$n\left|c_n x_1^n\right| = n\left|c_n x_2^n\right| \cdot \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n \le M \cdot n \cdot \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^n = M \cdot n \cdot \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n, \text{ для любого } n \in \mathbf{N}.$$

У нас $0 < x_1 < x_2$. Значит, $0 < \dfrac{x_1}{x_2} < 1$.

По лемме 1, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^n$ сходится, а значит, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \cdot n\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n.$$

Так как для любого $n \in \mathrm{N}: n\left|c_n x_1^n\right| \le M \cdot n\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n$, то заключаем, по первому признаку сравнения для положительных рядов, что в точке x_1 сходится ряд (12), а значит, ряд (9) в точке x_1 сходится, и притом абсолютно.

Мы знаем, что ряд (9) в точках, лежащих вне промежутка $[-R_2, R_2]$, расходится. Значит, точка x_1 не может лежать вне $[-R_2, R_2]$, а это означает, что $x_1 \in [-R_2, R_2]$. Но тогда

$$0 < x_1 \le R_2. \tag{13}$$

У нас x_1 — любое, удовлетворяющее условию $0 < x_1 < R_1$. Станем изменять x_1, устремляя его к R_1.

При этом в пределе из неравенства (13) получим

$$R_1 \le R_2.$$

Итак, получено: с одной стороны, должно быть $R_2 \le R_1$, а с другой стороны — должно быть $R_1 \le R_2$. Оба этих соотношения выполняются одновременно лишь тогда, когда $R_1 = R_2$. Лемма 2 доказана. ◀

Следствие. От почленного дифференцирования степенного ряда радиус сходимости его не изменяется.

▶ В самом деле, ряд, полученный в результате почленного дифференцирования ряда (1), лишь множителем x отличается от ряда (9), а следовательно, имеет тот же радиус сходимости R_2 ($= R_1$). ◀

Заметим, что сохраняется лишь радиус сходимости, но область сходимости может изменяться. Например, ряд $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ сходится при $x \in (-1; 1]$, а "продифференцированный" ряд имеет вид $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$. Это — геометрический ряд со знаменателем $q = -x$, а потому он сходится лишь при $x \in (-1; 1)$.

Теорема 5. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{1}$$

Пусть $s(x)$ — сумма ряда (1). Тогда в каждой точке $x \in (-R, R)$ существует $s'(x)$, причем

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}. \tag{14}$$

▶ Возьмем любую точку $x_0 \in (-R, R)$ и закрепим ее. Обязательно существует замкнутый промежуток $[-r, r]$ такой, что $[-r, r] \subset (-R, R)$, и точка $x_0 \in [-r, r]$. Заметим, что в промежутке $[-r, r]$ исходный ряд (1) сходится, и члены его имеют непрерывные производные. Так как R является радиусом сходимости и для ряда (14) и так как $[-r, r] \subset (-R, R)$, то ряд (14) сходится равномерно в $[-r, r]$.

Видим, что выполнены все условия теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда общего вида. По этой теореме заключаем, что в каждой точке $x \in [-r, r]$ существует $s'(x)$, причем $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$. В частности, существует $s'(x_0)$, причем $s'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x_0^{n-1}$. У нас точка x_0 — любая, принадлежащая $(-R, R)$. Значит, в каждой точке $x \in (-R, R)$ $s'(x)$ существует, причем $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$, $x \in (-R, R)$. ◀

Следствие. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{1}$$

Пусть $s(x)$ — сумма ряда (1). Тогда в каждой точке $x \in (-R, R)$ существуют $s'(x)$, $s''(x)$, ..., $s^{(k)}(x)$, ... :

$$\begin{gathered} s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}; \quad s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}; \quad \dots ; \\ s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots[n-(k-1)] c_n x^{n-k}; \quad \dots , \end{gathered} \tag{15}$$

причем ряды, стоящие в правых частях соотношений (15), имеют один и тот же радиус сходимости R.

Иначе говоря, степенной ряд можно дифференцировать почленно в интервале сходимости любое число раз.

Только что доказанная теорема и следствие из нее позволяют решить важный для дальнейшего вопрос о том, как связаны коэффициенты степенного ряда с его суммой. Нам будет удобнее рассматривать здесь степенной ряд общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ и обозначать его сумму через $f(x)$.

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, т.е.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots , \quad (16)$$

$x \in (a-\rho, a+\rho)$. Тогда коэффициенты этого ряда выражаются через $f(x)$ и число a следующим образом:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь ради общности записи считается условно, что $f^{(0)}(a) = f(a)$; $0! = 1$.

▶ По условию, равенство (16) имеет место при любом x из промежутка $(a-\rho, a+\rho)$. Положив в этом равенстве $x = a$, получим $c_0 = f(a)$.

Знаем, что для любого x из $(a-\rho, a+\rho)$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 \cdot (x-a) + 3c_3 \cdot (x-a)^2 + \ldots + nc_n \cdot (x-a)^{n-1} + \ldots .$$

Полагаем в этом равенстве $x = a$, получаем $c_1 = f'(a)$.

Имеем далее, для любого $x \in (a-\rho, a+\rho)$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \cdot (x-a) + \ldots + n(n-1)c_n \cdot (x-a)^{n-2} + \ldots ,$$

откуда при $x = a$ находим $f''(a) = 2! \cdot c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$.

Продолжая так далее, получим требуемое. ◀

Замечание. Если функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, то этот ряд может быть записан в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (17)$$

Заметим здесь же, что ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ может быть построен формально для каждой функции $f(x)$, имеющей в точке a производные любого порядка. Этот ряд называют рядом Тейлора функции $f(x)$ (причем он называется так независимо от того, сходится он или нет, и независимо от того, равна его сумма $f(x)$ или нет).

При $a=0$ будем иметь ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, который называют также рядом Маклорена функции $f(x)$. Непосредственным следствием из теоремы 6 является следующая, важная для дальнейшего теорема:

Теорема 7 (теорема о тождественном равенстве двух степенных рядов).

Пусть имеются два степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$. Если окажется, что эти ряды в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ имеют одну и ту же сумму $f(x)$, то они тождественны, т. е.

$$a_0=b_0;\quad a_1=b_1;\quad a_2=b_2;\quad \ldots;\quad a_n=b_n;\quad \ldots$$

▶ По теореме 6 имеем:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad \Rightarrow\quad a_n=b_n,\ n=0,1,2,\ldots$$ ◀

6°. Разложение функций в степенные ряды.

Задача разложения функций в степенные ряды состоит в том, чтобы по заданной функции $f(x)$ найти сходящийся степенной ряд, сумма $s(x)$ которого в области сходимости ряда равнялась бы $f(x)$.

Полезность представления $f(x)$ в виде суммы степенного ряда очевидна.

Дело в том, что члены степенного ряда, представляющие собою произведения постоянных коэффициентов на степенные функции x^n [или $(x-a)^n$], $n\in\mathbb{N}$, могут быть сравнительно легко вычислены при конкретных значениях x, что позволяет вычислять при этих x значения функции $f(x)$. Кроме того, представление функции

$f(x)$ в виде суммы степенного ряда позволяет находить значения производных и интегралов от функции $f(x)$ (и здесь это связано с тем, что легко могут быть найдены как производные, так и интегралы от членов степенного ряда).

Следует отметить еще, что при помощи разложений функций в степенные ряды можно интегрировать разнообразные дифференциальные уравнения. Это будет показано позже.

Итак, нам предстоит решать следующую задачу.

Задана функция $f(x)$. Требуется найти такие значения коэффициентов степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ (где a — известное число), чтобы в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ имело место равенство $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

Из теорем 5 и 6 следует, что функция $f(x)$ *необходимо должна иметь в промежутке* $(a-\rho, a+\rho)$ производные любого порядка и что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ должен быть для функции $f(x)$ ее рядом Тейлора, т.е. иметь вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Отсюда, между прочим, ясна единственность разложения $f(x)$ в ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ при данном числе a. Но, конечно, нет оснований ожидать, что всегда сумма $s(x)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, составленного для заданной функции $f(x)$, имеющей производные любого порядка, будет равна как раз функции $f(x)$. Чтобы такое равенство имело место, функция $f(x)$ должна удовлетворять еще некоторому дополнительному условию. Это условие мы получим из так называемой формулы Тейлора. Напомним ее.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ имеет непрерывные последовательные производные до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда для каждого значения $x \in (a-\rho, a+\rho)$ выполняется равенство

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, ξ — некоторое число между a и x.

Это — формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Ее частный случай, получающийся при $a = 0$, часто называют формулой Маклорена.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ в некотором промежутке $(a - \rho, a + \rho)$ имеет производные любого порядка. Тогда для любого $x \in (a - \rho, a + \rho)$ и при любом $n \in \mathbf{N}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x). \tag{18}$$

В формуле Тейлора станем неограниченно увеличивать число n.

Ясно, что если при этом окажется, что $R_n(x) \to 0$ для $x \in (a - \rho, a + \rho)$, то функция $f(x)$ в промежутке $(a - \rho, a + \rho)$ будет представлена в виде суммы степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad x \in (a - \rho, a + \rho).$$

Рассмотрим теперь разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций. Предварительно докажем следующую, весьма полезную для дальнейшего, теорему.

Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ определена в замкнутом промежутке $[A, B]$ и имеет там производные любого порядка. Пусть существует число $M > 0$, такое, что

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{и для любого} \quad x \in [A, B].$$

Тогда при любых x и a из $[A, B]$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{19}$$

▶ Возьмем любые x и a из $[A, B]$ и напишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Здесь ξ есть точка, лежащая между точкой a и точкой x; значит, $\xi\in[A,\ B]$.

По условию, $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ для любого $n\in\mathrm{N}$ и для любого $x\in[A,\ B]$. Следовательно, $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\le M$. Но тогда

$$\left|R_n(x,a)\right|=\left|f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ при любых x и a из $[A,\ B]$, то получаем $R_n(x,a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ при любых x и a из $[A,\ B]$. Таким образом, справедливость равенства (19) при любых x и a из $[A,\ B]$ установлена. ◀

Пример 1. Разложение в ряд Маклорена функций $\sin x$, $\cos x$.

▶ Пусть $f(x)=\sin x$. Имеем $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1$, для любого $n\in\mathrm{N}$ и для любого x. Пусть x и a — любые, заданные заранее. Всегда можно указать промежуток $[A,\ B]$, такой, что будет $x\in[A,\ B]$, $a\in[A,\ B]$. Видим, что выполнены все условия теоремы 8. Следовательно, для любых конечных x и a справедливо разложение

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n.$$

В частном случае, когда $a=0$, будем иметь

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n!}x^n=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots= \qquad (20)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Разложение в ряд Маклорена для функции $f(x)=\cos x$ можно получить совершенно такими же рассуждениями, как и в случае функции $\sin x$. Однако еще проще применить теорему о почленном дифференцировании степенного ряда. Будем иметь сразу из (20):

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots= \\ =\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty). \blacktriangleleft \tag{21}$$

Пример 2. Разложение функции e^x.

▶ Пусть $f(x)=e^x$. Имеем $f^{(n)}(x)=e^x$ для любого $n\in\mathrm{N}$. Пусть x и a — любые, заданные заранее. Всегда можно указать промежуток $[A, B]$, такой, что будет: $x\in[A, B]$, $a\in[A, B]$. Ясно, что для любого $n\in\mathrm{N}$ и для любого $x\in[A, B]$: $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le e^B$ (e^B — определенное число, оно выполняет роль числа M в теореме 8). Видим, что выполнены все условия теоремы 8. Значит, для любых конечных x и a справедливо разложение

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(x-a)^n.$$

В частном случае, когда $a=0$, будем иметь для любого конечного x:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,+\infty). \blacktriangleleft \tag{22}$$

Пример 3. Разложение в ряд Маклорена гиперболических функций $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$.

▶ Разложение в ряд Маклорена гиперболических функций $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$ проще всего получить, если воспользоваться разложением (22) функции e^x.

В самом деле, заменив в равенстве

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

аргумент x на $-x$, получим

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

Так как $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, то путем почленного вычитания и сложения написанных выше рядов найдем:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{23}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft \tag{24}$$

Пример 4. Разложение функции $\ln(1+x)$.

▶ Разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд Маклорена можно получить, написав для этой функции формулу Маклорена и исследовав остаточный член этой формулы. Но можно получить разложение для $\ln(1+x)$ без применения формулы Маклорена.

Действительно, положим $f(t) = \ln(1+t)$. При $|t| < 1$ будем иметь

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots \tag{25}$$

($\dfrac{1}{1+t}$ рассматриваем как сумму геометрического ряда; здесь $q = -t$).

Возьмем теперь любое x из промежутка $(-1, 1)$ и проинтегрируем почленно ряд (25) по промежутку $[0; x]$ (мы знаем, что степенной ряд можно интегрировать почленно по любому промежутку, содержащемуся целиком в интервале сходимости ряда). Получим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{26}$$

Разложение (26) установлено нами пока лишь для $x \in (-1, 1)$. Выясним, справедливо ли оно при $x = \pm 1$?

В точке $x = -1$ ряд (26) будет таким: $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Он расходится (гармонический ряд).

В точке $x = 1$ ряд (26) будет таким: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$. Он сходится по признаку Лейбница. Обозначим сумму ряда (26) через $s(x)$,

$x \in (-1, 1]$. По теореме о непрерывности суммы степенного ряда заключаем, что $s(x) \in C((-1, 1])$ (в точке $x = 1$ $s(x)$ непрерывна слева). Поэтому

$$s(1) = \lim_{x \to 1-0} s(x) = \lim_{x \to 1-0} \ln(1 + x) = \ln 2.$$

Значит, разложение (26) справедливо и при $x = 1$. Таким образом, окончательно

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Разложение функции $\operatorname{arctg} x$.

$\blacktriangleright$ Тем же способом, каким был получен ряд для функции $\ln(1 + x)$, можно получить и разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

В самом деле, положим $f(t) = \operatorname{arctg} t$. При $|t| < 1$ будем иметь

$$f'(t) = \frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots \tag{27}$$

($\frac{1}{1 + t^2}$ рассматриваем как сумму геометрического ряда; здесь $q = -t^2$).

Теперь возьмем любое x из промежутка $(-1, 1)$ и проинтегрируем почленно ряд (27) по промежутку $[0, x]$. Получим

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}. \tag{28}$$

Разложение (28) установлено нами пока лишь для $x \in (-1, 1)$. Выясним, справедливо ли оно при $x = \pm 1$?

В точке $x = -1$ ряд (28) будет таким: $-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n + 1}$. Он сходится (по признаку Лейбница).

В точке $x = 1$ ряд (28) будет таким: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n + 1}$. Он сходится (по признаку Лейбница).

Обозначим сумму ряда (28) через $s(x)$, $x \in [-1, 1]$. Так как ряд (28) сходится при $x = \pm 1$, то $s(x) \in C([-1, 1])$ ($s(x)$ непрерывна справа в точке $x = -1$ и непрерывна слева в точке $x = 1$). Поэтому

$$s(-1) = \lim_{x \to -1+0} s(x) = \lim_{x \to -1+0} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4},$$

$$s(1) = \lim_{x\to 1-0} s(x) = \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, разложение (28) имеет место и при $x = \pm 1$. Таким образом, окончательно

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]. \blacktriangleleft \tag{29}$$

Замечание. В разложении (29) мы сталкиваемся со странным, на первый взгляд, явлением: ряд, стоящий в правой части равенства, сходится только для $x \in [-1, 1]$, а левая часть равенства, функция $\operatorname{arctg} x$, имеет смысл при любом x. Объяснение этого факта мы узнаем позже при изучении функций комплексного аргумента.

Пример 6. Биномиальный ряд (разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$).

▶ Заметим сразу, что степенную функцию приходится брать в виде $(1+x)^m$, так как функция x^m не удовлетворяет, за исключением случая, когда m — целое положительное, необходимому условию наличия производных любого порядка; действительно, при $x = 0$ или сама эта функция, или ее производные, начиная с некоторого порядка, обращаются в бесконечность.

Составим для функции $f(x) = (1+x)^m$ (m — любое, вещественное, не равное нулю) ряд Маклорена. Для этого находим:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}; \quad f''(x) = m(m-1)\cdot(1+x)^{m-2}; \quad \ldots;$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\cdot(1+x)^{m-n}; \quad \ldots,$$

откуда

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = m; \quad f''(0) = m(m-1); \quad \ldots;$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]; \quad \ldots$$

Ряд Маклорена для функции $f(x) = (1+x)^m$ будет, следовательно, таким:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots \tag{30}$$

Заметим, что при целом положительном m ряд (30) обрывается на $(m+1)$-м члене, превращаясь в известный из элементарной математики "бином Ньютона". Если же число m — нецелое, или целое, но отрицательное, то ни один из коэффициентов ряда (30) в нуль не обратится, и нам придется иметь дело с бесконечным рядом. Этот ряд называется биномиальным, а его коэффициенты — биномиальными коэффициентами. По внешнему виду они напоминают обычные биномиальные коэффициенты, рассматриваемые в элементарной математике.

Найдем радиус сходимости ряда (30). Для этого составляем ряд из модулей членов ряда (30) и применяем к полученному ряду признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n(x)|}{|u_{n+1}(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]|\cdot(n+1)!\cdot|x|^n}{|m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](m-n)|\cdot n!\cdot|x|^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|m-n|}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left|\frac{m}{n}-1\right|}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left|\frac{m}{n}-1\right|}\cdot\frac{1}{|x|}=\frac{1}{|x|}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (30) сходится, и притом абсолютно, если $|x|<1$, и расходится, если $|x|>1$. Значит, радиус сходимости ряда (30) равен 1 ($R=1$). Сумму ряда (30) обозначим через $s(x)$, $x\in(-1,1)$. Нам нужно теперь проверить, что ряд (30) сходится к $f(x)$, т.е. что $s(x)=f(x)$, $x\in(-1,1)$.

Мы знаем, что в интервале сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно. Следовательно, для любого $x\in(-1,1)$ будем иметь

$$s'(x)=m+\frac{m(m-1)}{1!}x+\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots=$$

$$=m\left[1+\frac{(m-1)}{1!}x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots\right]. \qquad (31)$$

Умножим обе части равенства (31) на $(1+x)$ и приведем подобные члены. Эта операция законна, так как для $x \in (-1, 1)$ ряд (31) сходится абсолютно.

Получим

$$(1+x)\,s'(x) = m\left[1+\left(\frac{m-1}{1!}+1\right)\cdot x+\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2!}+\frac{m-1}{1!}\right)\cdot x^2+\ldots\right.$$

$$+\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-2)]}{(n-2)!}\right)\cdot x^{n-1}+$$

$$+\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{n!}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{(n-1)!}\right)\cdot x^n+\ldots\right]=$$

$$= m\underbrace{\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots\right]}_{=s(x)}.$$

Таким образом, для любого $x \in (-1, 1)$ имеем

$$(1+x)\,s'(x) = s(x)\cdot m. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{s(x)}{f(x)}\quad\left(=\frac{s(x)}{(1+x)^m}\right),\qquad x \in (-1, 1),$$

и найдем производную этого отношения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{s(x)}{f(x)}\right)=\frac{s'(x)\cdot(1+x)^m - s(x)\cdot m(1+x)^{m-1}}{(1+x)^{2m}}=$$

$$=\frac{(1+x)\,s'(x)-s(x)\cdot m}{(1+x)^{m+1}}.$$

В силу (32) числитель последней дроби равен нулю для любого $x \in (-1, 1)$, так что $\frac{d}{dx}\left(\frac{s(x)}{f(x)}\right)=0$, $x \in (-1, 1)$. Но тогда $\frac{s(x)}{f(x)}=C$ (const), $x \in (-1, 1)$, откуда

$$s(x) = C \cdot f(x), \quad x \in (-1, 1). \tag{33}$$

Из выражения (30) для $s(x)$ замечаем, что $s(0) = 1$. Это условие используем для определения постоянной C.

Для этого положим в обеих частях равенства (33) $x = 0$. Получим

$$s(0) = C \cdot f(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Таким образом, окончательно получаем $s(x) = f(x)$, $x \in (-1, 1)$, т.е.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1). \tag{34}$$

Разложение (34) установлено нами для $x \in (-1, 1)$. Что касается концов промежутка: $x = \pm 1$, то мы приведем результаты без доказательства.

Эти результаты таковы:

1) если $m > 0$, то разложение (34) справедливо для $x \in [-1, 1]$;

2) если $-1 < m < 0$, то разложение (34) справедливо для $x \in (-1, 1]$;

3) если $m \leq -1$, то разложение (34) справедливо для $x \in (-1, 1)$.

Замечание 1. Биномиальный ряд является основой разложений многих функций в ряды.

Найдем, например, разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \arcsin x$.

▶ Положим $f(t) = \arcsin t$. Тогда $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим биномиальный ряд при $m = -\dfrac{1}{2}$ и независимой переменной $(-t^2)$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}t^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^n}t^{2n} + \quad ,$$

$$t^2 \in [0, 1) \ \Leftrightarrow \ t \in (-1, 1).$$

Возьмем любое $x \in (-1, 1)$ и проинтегрируем почленно полученный ряд по промежутку $[0, x]$. Будем иметь

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!2^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\ , \qquad x \in (-1, 1),$$

откуда

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{35}$$

Разложение (35) установлено нами пока лишь для $x \in (-1, 1)$. Выясним, справедливо ли оно при $x = \pm 1$?

В точке $x = 1$ ряд (35) будет таким:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}.$$

Имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!\cdot(2n+2)!!\cdot(2n+3)}{(2n)!!\cdot(2n+1)\cdot(2n+1)!!} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Составляем переменную Раабе

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\cdot\left(\frac{(2n+2)(2n+3)-(2n+1)^2}{(2n+1)^2}\right) =$$

$$= n\frac{6n+5}{(2n+1)^2} = \frac{n^2\left(6+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2} \ \ (>1).$$

Значит, ряд (35) в точке $x = 1$ сходится. В точке $x = -1$ будем иметь $-1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$. Этот ряд лишь знаком отличается от ряда (35) в точке $x = 1$. Значит, он тоже сходится. Обозначим сумму ряда (35) через $s(x)$, $x \in [-1, 1]$. По изложенному в п. 3°, заключаем, что $s(x) \in C([-1, 1])$, причем $s(x)$ непрерывна справа в точке $x = -1$ и непрерывна слева в точке $x = 1$. Имеем

$$s(-1)=\lim_{x\to -1+0}s(x)=\lim_{x\to -1+0}\arcsin x=-\frac{\pi}{2},$$

$$s(1)=\lim_{x\to 1-0}s(x)=\lim_{x\to 1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

Значит, разложение (35) справедливо в промежутке $[-1,1]$. ◀

Замечание 2. Следует иметь в виду, что разложение функций в степенной ряд при помощи использования уже известных разложений часто осуществляется проще, чем с помощью формулы Маклорена. Мы видели это на примерах разложений в ряд функций: $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

Приведем еще один пример.

Пример. Разложение показательной функции $f(x)=a^x$ в ряд Маклорена.

▶ Имеем $a^x=e^{x\ln a}$. Положим $t=x\ln a$. Известно, что для любого $t\in(-\infty,+\infty)$

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}.$$

Заменив в этом равенстве t на $x\ln a$, будем иметь сразу для любого $x\in(-\infty,+\infty)$:

$$a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\ldots+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n. ◀$$

Дополнение к теории рядов

1°. Вычисление сумм числовых рядов с заданной точностью.

В главе "Числовые ряды с вещественными членами" мы много занимались исследованием сходимости числовых рядов. Однако наряду с вопросами сходимости при оперировании с рядами возникает другая важная и более трудная проблема — задача суммирования рядов.

Мы видели на примерах геометрического ряда и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, что иногда можно найти сумму ряда по определению, т.е. вычисляя $\lim_{n\to\infty}s_n$. В большинстве же случаев этот естественный путь суммирования ряда наталкивается на непреодолимые трудности. Поэтому часто ставится вопрос об отыскании приближенного значения суммы данного числового ряда с наперед заданной степенью точности.

Принципиальное значение этого вопроса очевидно. Пусть имеется сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (так как ряд сходится, то он имеет сумму s). По определению, $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ (s_n — n-я частичная сумма ряда). Поэтому, если требуется найти приближенное значение суммы ряда s с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине положительного числа ε, мы выбираем число $N = N(\varepsilon)$ таким, чтобы было

$$|s - s_n| < \varepsilon, \text{ для любого } n \in \mathbf{N},$$

и принимаем за искомое приближенное значение суммы ряда s частичную сумму s_n $(n > N)$.

Таким образом, по заданной абсолютной погрешности ε мы находим такой член ряда a_n, чтобы сумма остатка ряда R_n, начинающегося со следующего члена, по абсолютной величине не превосходила число ε, т.е. $|R_n| \le \varepsilon$. Тогда оставшаяся частичная сумма s_n и будет ответом.

Однако следует иметь в виду, что, вычисляя значение частичной суммы s_n нашего ряда, приходится переводить члены этой частичной суммы в десятичные дроби, производя при этом округления, т.е. внося новые погрешности, вызванные техникой вычисления. Эти погрешности необходимо учитывать так, чтобы в сумме с оценкой отброшенного остатка ряда R_n получить число, не превосходящее заданной погрешности ε. Для этого число ε разбивают на два положительных слагаемых $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и при определении номера n частичной суммы s_n, принимаемой за приближенное значение суммы ряда s, требуют, чтобы выполнялось условие $|R_n| < \varepsilon_1$, а при вычислении частичной суммы s_n, переводя члены ряда в десятичные дроби, оставляют такое количество десятичных знаков, чтобы сумма погрешностей, допущенных в каждом члене s_n, не превосходила число ε_2.

Пример 1. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.00001, сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots$$

▶ Разбиваем заданную допустимую погрешность $\varepsilon = 0.00001$ на два слагаемых: $\varepsilon = 0.000005 + 0.000005$. Так как данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то модуль суммы остатка ряда не превосходит модуля первого члена остатка. Поэтому следует найти ближайший к началу ряда член, модуль которого не превосходит 0.000005. Таким членом будет $\frac{1}{9!}$, так как $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} < 0.000005$ (заметим, что предыдущий член отбросить нельзя, так как $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} > 0.00001$).

Таким образом, с ошибкой, не превосходящей 0.000005, будем иметь

$$s \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{5040 - 840 + 42 - 1}{7!} = \frac{4241}{5040} \quad \Rightarrow \quad s \approx 0.84147$$

(погрешность округления < 0.000003). ◀

Пример 2. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.001, сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$.

▶ Разбиваем заданную допустимую погрешность $\varepsilon = 0.001$ на два слагаемых $\varepsilon = 0.0005 + 0.0005$. Так как данный ряд положительный, удовлетворяющий условиям интегрального признака Коши, то сумма остатка ряда $R_n \le \int\limits_n^{+\infty} f(x)\,dx$. Здесь $f(x) = \frac{1}{x^5}$ — производящая функция для данного ряда. Имеем

$$\int\limits_n^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4}\bigg|_{x=n}^{x=+\infty} = \frac{1}{4n^4}.$$

Выясним, сколько нужно взять первых членов ряда, чтобы сумма остатка ряда была меньше 0.0005. Для этого нужно рассмотреть неравенство:

$$\frac{1}{4n^4} < 0.0005 \quad \Rightarrow \quad 4n^4 > 2000 \quad \Rightarrow \quad n^4 > 500.$$

Путем проб находим, что наименьшее значение n, удовлетворяющее этому неравенству, есть $n = 5$ ($5^4 = 625 > 500$, а $4^4 = 256 < 500$). Значит, если взять пять первых членов, т.е. положить

$s \approx 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5}$, то абсолютная погрешность будет меньше 0.0005.

Имеем далее

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} = 1.036$$

(погрешность округления меньше 0.0004). ◀

Пример 3. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.001, сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$

▶ Разбиваем заданную допустимую погрешность $\varepsilon = 0.001$ на два слагаемых $\varepsilon = 0.0005 + 0.0005$. Имеем

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{n!}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right)}_{\text{геом. ряд}} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Выясним, сколько нужно взять первых членов ряда, чтобы сумма остатка ряда была меньше 0.0005. Для этого нужно рассмотреть неравенство

$$\frac{n+1}{n!n} < 0.0005.$$

Путем проб находим, что наименьшее значение n, удовлетворяющее этому неравенству, есть $n = 7$. В самом деле, $\frac{8}{7! \cdot 7} = \frac{8}{35280} < 0.0003$, а $\frac{7}{6! \cdot 6} = \frac{7}{4320} > 0.0005$. Значит, с ошибкой, меньшей 0.0005, будем иметь

$$s \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} =$$

$$= 2.5 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2.5 + \frac{157}{720} \quad \Rightarrow \quad s \approx 2.718$$

(погрешность округления < 0.0005). ◀

Замечание. Для абсолютно сходящихся знакопеременных рядов (но не знакочередующихся), оценивая сумму остатка ряда, заменяют остаток ряда рядом, составленным из модулей членов остатка, а с последним поступают так же, как при оценке суммы остатка положительного ряда.

2°. Вычисление значений функций при помощи степенных рядов.

Разложения функций в степенные ряды позволяют во многих случаях вычислять с любой наперед заданной точностью значения этих функций. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.00001, $\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$.

▶ Имеем $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно,

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(0.1)^n}{n!} + \ldots$$

Разбиваем заданную допустимую погрешность на два слагаемых: $\varepsilon = 0.000005 + 0.000005$. Имеем

$$R_{n+1} = \frac{(0.1)^n}{n!} + \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(0.1)^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{(0.1)^n}{n!}\left(1 + \frac{0.1}{n+1} + \frac{(0.1)^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) < \frac{(0.1)^n}{n!}\left(1 + \frac{0.1}{n+1} + \frac{(0.1)^2}{(n+1)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{(0.1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0.1}{n+1}} = \frac{(0.1)^n \cdot (n+1)}{n!(n+0.9)}.$$

Выясним, сколько нужно взять первых членов ряда, чтобы сумма остатка ряда была меньше 0.000005. Для этого нужно рассмотреть неравенство .

$$\frac{(0.1)^n\cdot(n+1)}{n!(n+0.9)}<0.000005\,.$$

Путем проб находим, что наименьшее значение n, удовлетворяющее этому неравенству, есть $n=4$. Значит, с ошибкой, меньшей 0.000005, будем иметь

$$e^{\frac{1}{10}}\approx 1+0.1+\frac{0.01}{2!}+\frac{0.001}{3!}\quad\Rightarrow\quad \sqrt[10]{e}\approx 1.10517$$

(погрешность округления <0.000005). ◀

Пример 5. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0.0001, $\sqrt[5]{35}$.

▶ Имеем $\sqrt[5]{35}=2\cdot\sqrt[5]{\dfrac{35}{32}}=2\left(1+\dfrac{3}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Мы знаем, что $(1+x)^{\frac{1}{5}}=1+\dfrac{1}{5}x-\dfrac{4}{2!\cdot 5^2}x^2+\dfrac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}x^3-\ldots$

Следовательно,

$$\sqrt[5]{35}=2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{4}{2!\cdot 5^2}\cdot\frac{3^2}{(32)^2}+\frac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}\cdot\frac{3^3}{(32)^3}-\ldots\right).$$

Разбиваем заданную допустимую погрешность на два слагаемых: $\varepsilon=0.00005+0.00005$. Так как ряд знакочередующийся, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, то методом проб находим ближайший к началу член, модуль которого не превосходит 0.00005. Таким членом оказывается $\dfrac{4\cdot 9}{3!\cdot 5^3}\cdot\dfrac{3^3}{(32)^3}$. Значит, с ошибкой, меньшей 0.00005, будем иметь:

$$\sqrt[5]{35}\approx 2+\frac{3}{80}-\frac{9}{6400}\quad\Rightarrow\quad \sqrt[5]{35}\approx 2.0361$$

(погрешность округления <0.00005). ◀

3°. Вычисление интегралов при помощи степенных рядов.

Способ вычисления определенных и неопределенных интегралов с помощью степенных рядов состоит в следующем: разлагаем (если это возможно) подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем производим почленное интегрирование полученного ряда. Приведем несколько примеров.

Пример 6. Вычисление интегрального синуса $\operatorname{si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

▶ Точка $t = 0$ — особая точка (в ней не определена подынтегральная функция). Так как $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, то $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ — ограниченная функция.

Если положить $\tilde{f}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$, то легко видеть, что $\tilde{f}(t) \in C([0, x])$, где x — любое. Значит, для любого конечного x

$\tilde{f}(t) \in R([0, x])$, а значит, $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ сходится.

Имеем

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

откуда

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

(в точке $t = 0$ левую часть равенства понимаем в предельном смысле). Следовательно,

$$\operatorname{si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)} + \ldots,$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Подставляя в ряд вместо x те или иные конкретные значения, мы можем найти интересующие нас значения функции $\operatorname{si} x$. ◀

Пример 7. Вычисление $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$.

▶ Заменяя в равенстве $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$ аргумент t на $-\frac{y^2}{2}$, получаем разложение функции $e^{-\frac{y^2}{2}}$ в степенной ряд (годное при любом значении y):

$$e^{-\frac{y^2}{2}} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)^n + \ldots$$

Пусть x — любое конечное. Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится равномерно в $[0, x]$, ибо $[0, x] \subset (-\infty, +\infty)$. Поэтому законно почленное интегрирование этого ряда в $[0, x]$. Получаем

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 2^2 \cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)} + \ldots \right).$$

Подставляя в ряд вместо x конкретные значения, можно найти интересующие нас значения функции $\Phi(x)$.

Литература

1. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : учебник для бакалавров. В 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2014.

2. *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 5-е изд. — СПб. : Лань, 2008.

3. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа. В 2 т. / С. М. Никольский. — 3-е изд. — М. : Наука, 1983.

4. *Толстов, Г. П.* Курс математического анализа. В 2 т. Т. 2 / Г. П. Толстов. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.

5. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2, 3 / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Физматлит, 2001.

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: gred@urait.ru

Новые издания и дополнительные материалы доступны на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Учебное издание

Аксенов Анатолий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 3

Учебник и практикум для вузов

Формат 60×90 1/16.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 22,56

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru